复杂系统与复杂网络

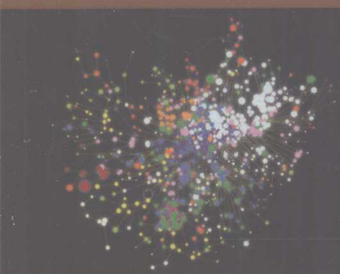
Complex Systems and Complex Networks

何大韧　刘宗华　汪秉宏　编著





高等教育出版社
Higher Education Press



本书为学习和研究复杂网络的初学者们阐述了必要的基础知识；

本书为使用复杂网络工具研究复杂系统的非物理同行们提供了物理工作者的观点和方法；

本书为高校师生和学术界的青年朋友们介绍了复杂网络与复杂系统科学的一些最新研究进展。

Complex Systems and Complex Networks

学科类别：物理



ISBN 978-7-04-025627-7

9 787040 256277 >

定价 42.00 元

复杂系统与复杂网络

Complex Systems and Complex Networks

何大韧　刘宗华　汪秉宏　编著

高等教育出版社

内容提要

本书从研究复杂系统的角度来介绍复杂网络。作为一本入门引导，前五章介绍一些复杂系统理论的基础知识，包括熵、计算机与信息、非平衡统计物理学、耗散结构与协同学、临界现象与自组织临界性、混沌、元胞自动机模型、复杂性的定义与量度、有关的统计物理学方法、博弈论、数理统计、图论等。第六、第七章介绍复杂网络的一些基础知识，包括描述网络拓扑结构的统计性质以及一些有影响的网络演化模型。在第八、第九、第十章中介绍了网络上的物理传输过程、生命网络和合作网络与合作－竞争网络。其中侧重介绍了作者群体的工作。另外，本书阐述了作者们对复杂网络研究前景的一些看法，特别是在第十一章中介绍了关于复杂网络动力学框架的一些最新研究。

本书可作为复杂系统与复杂网络研究方向的研究生教材，也可作为相关领域研究人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

复杂系统与复杂网络/何大韧，刘宗华，汪秉宏编著．
北京：高等教育出版社，2009.1
ISBN 978－7－04－025627－7

Ⅰ．复… Ⅱ．①何…②刘…③汪… Ⅲ．统计物理学
－研究 Ⅳ．O414.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 185128 号

策划编辑 王　超　**责任编辑** 李　茜　**封面设计** 张　楠　**责任绘图** 尹　莉
版式设计 史新薇　**责任校对** 胡晓琪　**责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京机工印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2009 年 1 月第 1 版
印　　张	19.25	印　　次	2009 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	350 000	定　　价	42.00 元

物料号　25627－00

前言

十年之前(1998年6月4日),Nature发表了两位年轻的物理学家(D. J. Watts和S. H. Strogatz)关于网络的一篇论文。一年多之后(1999年10月15日),Science又发表了另外两位年轻的物理学家(A. L. Barabasi和R. Albert)关于网络的另一篇论文。这两篇论文引发了关于复杂网络的研究热潮。这个潮流席卷全球,涉及数学、力学、物理学、计算科学、管理科学、系统科学、社会科学、金融经济科学等许多科学领域,以及交通运输、能源传输、通信工程、电子科学,甚至医学、烹饪等许多应用学科。至今(2008年3月),D. J. Watts和S. H. Strogatz的论文被SCI收录的论文引用5670次;A. L. Barabasi和R. Albert的论文被引用3275次。

人们把周围的许多系统(天然的或者人造的,例如交通网、电力网、人际关系网等)看作网络由来已久,运用数学的一个分支——"图论"对这些系统进行研究也已经有百年以上的历史。上述两篇文章的重要之处在于作者发现许多实际网络具有一些共同的拓扑统计性质,即"小世界性"和"无标度性"。这些性质既不同于规则网络,也不同于随机网络,正像近几十年来物理学家认为"复杂位于规则与随机之间"一样,所以大家把实际网络称为"复杂网络"。所谓小世界性是指实际网络具有比规则网络小得多的平均节点间距离和比随机网络大得多的平均集群系数(即邻点之间也相邻,形成紧密集团的比例);而无标度性则指实际网络中节点邻边数取一个定值的概率分布函数是幂函数(规则网的这个分布是δ函数,而随机网是正态分布)。这个幂函数标志基本单元与其邻居相互作用能力的极其不均匀分布。更加引人注目的是:论文的作者提出了解释这些独特规律的网络演化模型,而且运用统计物理学方法从这些模型解析地得出了这些独特规律。这些模型的思想简单明白、直观合理。产生小世界性的机制就是一部分基本单元之间相互作用的远程性、跳跃性和随机性;产生无标度性的机制就是基本单元建立相互作用的"优选"(或者称为"富者更富")法则。这是第一次把统计物理学的思想和方法引进网络或者图论的研究,因此,若与传统的图论或网络理论比较,也许可以说当前的复杂网络研究的特征就是统计物理学的进入,所以应该把统计物理学列入复杂网络研究的基础知识之中。

在这十年中,不止一次地有人发表议论,说复杂网络研究已经差不多了,现在参加已经太晚;或者说复杂网络研究的前途只剩下在各个实际领域中的应用,基础研究已经基本到头等。然而,事实正好相反,国内外的复杂网络研究,包括

基础研究和可能的应用研究,都在快速发展。自从复杂网络研究兴起,我国物理学界就及时融入了世界科学的新潮流。2000—2001年间,胡进锟、熊诗杰、邹宪武、金准智、陈天仑、胡班比、胡岗、汪凯歌、高自友、朱陈平、汪小帆、陈关荣等人在SCI期刊Phys. Rev. E、Phys. Rev. B和Comm. Theo. Phys. 上发表了早期工作。其中汪小帆、陈关荣等人2001—2002年的论文引起了较大的反响。与此大约同时的还有刘宗华、来颖诚等2002年在Phys. Lett. A,以及欧阳颀等人2002年在Phys. Rev. E发表的文章。2004年初夏在无锡召开全国第一次复杂网络学术论坛时,只有50人参加、20人发言。到了2006年初冬在武汉召开全国第二次复杂网络学术大会时,就有300人参加、200多人发言。在2007年11月上海的全国第三次复杂网络学术会议上,经过严格审稿最后收入会议论文集的论文就有249篇,参加会议的人数超过400。估计全国从事复杂网络研究的人数以千计,包括数学、力学、物理学、计算科学、管理科学、系统科学、社会科学、金融经济科学等许多科学领域,以及交通运输、能源传输、通信工程、电子科学,甚至医学、烹饪等许多应用学科的研究生和研究人员。正如香港城市大学的陈关荣教授为2006年武汉的全国第二次复杂网络学术大会文集所写的序言中说的:“从过去这几年国际上复杂网络的研究进展来看,发表的论文数量有增无减,专著陆续出版,论题的覆盖面不断拓宽,理论的探讨不断深入,并且渗透到越来越多的不同学科、特别是边缘和交叉学科里面去,可见其发展姿态依然是方兴未艾、形势喜人。展望不远的将来,可以预见,像复杂网络这样规模庞大、非线性强、复杂度高而且种类繁多的多节点连接巨型动态系统,其研究工作绝不会在短期内就取得比较完整的结论,其发展状态亦绝不会直线式地迅猛上升;但是也正因为这样,其发展趋势亦一定不会很快地衰落下来。毋庸置疑,复杂网络应该是相关领域里新一代研究生和青年科研工作者选题定向和专业发展最好的选择之一。”

为什么还需要深入地进行复杂网络的研究?复杂网络研究的最主要目标是什么?可能不同的人有不同的看法。我们3位作者作为物理学工作者,习惯于从物理学发展的角度看问题。

本书的读者们应该都熟悉经典物理学,尤其熟悉经典力学和经典电磁学,这是物理学中比较接近我们周围的世界,比较好懂,又特别能显示由牛顿及其追随者们创立、完善现代物理学方法论框架美妙魅力的部分。在经典力学和经典电磁学中,研究的对象——运动物质,被想象为可以被分割为无限多个无限小,又在空间中连续分布的基本单元的集合。这些基本单元(质点或者电荷元)被放在均匀空间中的各个规则格点位置上,因此,使用千年前数学家们创造的坐标体系就可以完善地描述这个体系的运动。尽管各个基本单元的空间位置不同,而且一般来说在随时间变化,但是由于它们之间的相互作用遵从已经被认识的简

单的、普适的基本法则，因此运用几百年前创立的微积分工具（以及基本思想类似的一些现代数学工具）就可以非常简明地表示支配每一大类客观体系运动变化的普遍动力学规律，并且可以用来准确地预言这些体系未来的行为，为人类服务。以坐标的运动学描述和微积分（以及其他基本思路相似的现代数学方法）为基础的动力学描述成为现代物理学辉煌大厦的支柱。

然而，自然界中存在大量不适于或者不能够用这种方法论（被称为"还原论"）讨论的系统。在第一类系统中，虽然我们原则上可以运用还原论进行它们演化的讨论，但是实际上，由于基本单元的相互作用涉及非常多的因素，这些因素又错综复杂地交连，所以不但进行动力学的解析讨论不可能，连不考虑近似的用"理想精确"数值"从头计算"也不大可能。与国计民生密切相关的气象系统、地震系统、足够复杂结构的各种材料系统都是这类系统的例子。可以说随着物理学研究的不断深化，几乎各个物理学分支的前沿都涉及这类复杂系统。物理学家越来越认识到不能继续被局限在还原论的框架内去讨论这类系统，必须探寻全新的思想方法论才有解决问题的希望。除此之外，另一类系统根本不能用还原论来处理，这是由于这类系统基本单元的"组织"会"涌现"许多种大量分立个体不会展示的性质，因此不可能仅仅依据单元个体性质来预言系统整体的丰富行为。这类系统的最典型代表是具有生命特征的所谓"自适应系统"（即基本单元具备根据外界信息进行预期、采取对策、改进自身及其与其他单元或环境的关系的系统），例如生物系统、生态系统、社会系统、经济系统等。近几十年来，由于各门科学，尤其是计算机科学和非线性科学的发展，许多科学家（包括物理工作者）认为突破还原论的限制，寻求描述复杂系统的概念和理论，把物理学的适用领域推广到复杂系统的任务已经提上日程。

改造世界必须先认识世界，而认识世界必须先描述世界。世界上的客观系统是由规则、均匀分布，全同、遵从简单普适规律的基本单元构成的，还是由高度不规则、不均匀分布，显示丰富多彩的种类、相互作用、有组织的基本单元构成的？这可能是把物理学推广向复杂系统时要回答的首要问题。这个问题正在引起物理学家（以及许多领域内的科学家）对复杂网络研究的空前热烈兴趣。

最简单地回顾一下生物学研究的历史可能是有益的。20世纪前，生物学基本上属于经验科学，没有多少真正可称为理论的东西。20世纪中叶以后，物理学、化学的仪器与方法大规模地进入生物学研究，同时带给生物学的还有物理学先分解、再综合的方法论。20世纪后期盛极一时的分子生物学体现了这些变化带来的辉煌成就。"分解"发现了蛋白质结构、基因以及遗传信息序列等。然而，"综合"却遇到了非常大的困难。生物系统远远不像经典物理学研究的力学或电学系统那样容易从基本单元综合起来，生物系统基本单元的种类太多，它们之间的作用太错综复杂，也许只有用网络（可能还是一大堆网络）来形容才比较

合适。这就是21世纪开始后系统生物学(包括所谓"生物网络")兴起的原因。这个发展历程和形势吸引了大批物理学家试图进入生命科学研究领域。

前面所说的Nature和Science上发表的那两篇论文在物理学界引发了地震,使许多物理学家,尤其是统计物理学家认识到实际系统使用网络描述的重要性,统计物理学进入网络研究并大有作为的可能性,以及网络描述作为复杂系统研究工具的可能光辉前景。近十年来,复杂网络研究的论文车载斗量,然而,要达到物理学家寻求复杂系统动力学理论框架的目标,复杂网络研究还任重而道远。

首先,复杂网络研究依赖的主要数学基础理论——"图论"的主流还很难与物理学动力学描述的要求挂钩。从1736年诞生开始,图论研究就集中于位于某个平面(或二维曲面)上的一些基本单元之间的位置关系、这些位置之间的某种联系以及图上某种量的传播等问题。这种对系统基本单元及其相互作用的描述是"静态"和"平面"的,没有提供对相互作用丰富特性及其随时间演化的描述方法,更缺乏总结这些相互作用特征与规律,从而预言系统行为的手段。就我们所知,突破传统框架的图论研究已经开始发展,并带给物理学家极大鼓舞。此外,已经有一些从其他角度探索复杂网络动力学工具的研究。我们将根据自己的理解,选择这些研究成果的一部分在本书最后一章予以简介。然而,这些研究只能说是一个开始。

其次,把复杂网络作为研究对象对于统计物理学也是新问题。统计物理学还不能提供针对这类对象的最有效思想、方法、工具。目前的研究在借用一些多年来对许多类研究对象行之有效的方法,例如平均场理论、主方程、率方程、生成函数、最大似然估计等。本书将从物理角度简介这些方法。专门针对复杂网络研究的统计物理学方法的发展将是物理学工作者的一个重要探索方向。

还有不少原因可以被列举,来说明复杂网络研究还将不断地推出意义重大的研究成果并将热烈地延续很长时间。正像R. Albert和A. L. Barabasi在2002年Reviews of Modern Physics上发表的综述文章(被SCI收录论文引用4231次)中所说的:"我们相信,这些(已经获得的)结果仅仅是一杯冰淇淋的小尖。"我们同样相信,还会有很多年轻朋友们陆续进入这个前程远大、可能对人类具有重大影响的科学领域,还会有许多关于这个领域的研究专著出版。如果本书能作为一本入门引导,能被一些青年朋友喜欢,我们将感到无比欣慰。

在我们的知识范围内,虽然国外关于复杂网络的科学专著已经出版过几十本,还没有一本特别考虑初学者的需求。国内已经出版了两本关于复杂网络的高水平专著。第一本是《复杂网络》,由郭雷、许晓鸣等(包括本书作者之一汪秉宏)主编(上海科技教育出版社,2006)。它由31位作者(包括本书作者之一何大韧)分工写作13章。每一章由熟悉该方向的专家综述其前沿研究,并兼顾他们自己的工作汇报。内容全面,质量高,但是部分初学者阅读可能有一定困难。

第二本是《复杂网络:理论及其应用》,由汪小帆、李翔、陈关荣著(清华大学出版社,2006),它由这3位长期合作的高水平专家撰写,有很好的系统性和前沿水平。该书作者具有开设研究生课的基础,因此也兼顾了与本科生水平的接轨。然而,3位作者都具有工程和数学的学术背景,所以他们的大作与本书的风格有差异。另外,他们的研究水平很高,强调学术水平,不像本书这样以作者6年来为研究生授课的讲义为基础,特别强调介绍基础知识。本书共分为11章,我们使用其中的5章,分别简单介绍进行复杂网络研究所需的5个科学领域的基础知识,包括复杂性与复杂系统、有关的统计物理学方法、博弈论、数理统计、图论,并且推荐一些比较容易阅读的参考文献。我们期望读者们仍旧会感到本书有用。

本书的3位作者进行亲密的研究合作已经接近20年,现在我们领导的集体(中国科技大学理论物理研究所、华东师范大学理论物理研究所、扬州大学复杂性科学研究中心)又共同承担国家自然科学基金的重点项目"基于复杂网络的复杂系统动力学与统计行为的研究"(项目号:10635040)。本书是由这个重点项目资助获得的一个重要成果,也是我们合作的一个重要纪念。本书包含3个研究集体6年来一百多人的辛勤研究成果,无法在此一一列举,仅此表示感谢。另外,应我们的特别邀请,南京航空航天大学的朱陈平副教授为本书编写了第7章第11节,扬州大学的官山副教授为本书编写了第10章第3节。在此我们要特别感谢朱陈平副教授,他不但非常仔细地阅读了本书全稿,提出了很多极有价值的修改意见,而且也积极参加我们基金重点项目(10635040)的研究工作,贡献了不少高质量的论文。同时,本书的出版得到扬州大学出版基金和高等教育出版社的大力支持与资助,在此致以深深的谢意。

目　录

第一章 漫谈复杂性与复杂系统

从20世纪末以来，不少物理学工作者一直在寻求描述复杂系统的概念和理论，力图把物理学的适用领域推广到复杂系统[1-7]。近十年来，复杂网络成为被寄予希望的一种描述工具。然而，要把复杂网络与复杂系统的研究很好地结合，首先要知道什么是复杂，什么是复杂系统、简单系统以及复杂性。这可能也是古往今来许多智者反复思考过的问题。除了定性的回答之外，几十年来，许多科学家致力于建立定量的定义，希望利用这样的定义来定量计算各种系统的复杂程度，从而比较不同系统复杂程度的大小。他们的成果尽管都还没有得到公认，但是很可能是建立复杂系统理论的必经阶段之一。这类研究论文数量相当多，已经提出的定义五花八门，有些很难搞懂，更难计算，要在本章中全面介绍不大可能，然而，这些研究发展的大趋势是一致的，都是从20世纪中叶以来物理学及一些别的科学分支的一些大进展延拓开来的。我们认为与复杂网络研究直接关联的正是这些大进展带来的物理学新理解，而不是个别的复杂性定义。因此，本章将主要介绍这些大进展，对复杂性定义仅按照我们的看法选择一小部分进行简介。知道这些知识对读者们理解本书以后介绍的内容很可能是必要的。由于本章各节的内容都涉及一门大学科，这里不可避免地只能作科普性的介绍，就当是在以后各章理论内容之前的一段比较轻松的阅读吧。

1.1 熵

物理学中对“复杂”的最初考虑和争论也许要从统计物理学的建立，也就是概率论的描述和统计方法进入物理学算起[8]。在一百多年前，以玻耳兹曼为代表的物理学家倡导统计物理学的时候，一切并不那么容易。

为了说明这一点，我们有必要简单介绍牛顿（图1.1）和其他几位伟大的力学家的贡献。牛顿在1661年（19岁）进入剑桥大学，靠为学院做杂务支付学费。教授伊萨克·巴罗独具慧眼，在1664年，把牛顿选为自己的助手。1669年，巴罗为了提携牛顿而辞去了教授之职，26岁的牛顿晋升为数学教授。微积分的创立和经典力学完整、严密体系的建立是牛

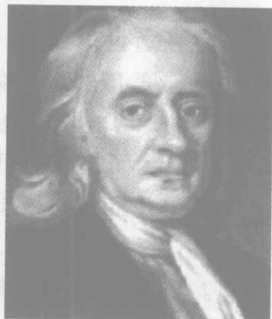


图1.1 牛顿（1642—1727）

顿最卓越的成就。英国的政府与社会也给了他丰厚的回报。1705 年(63 岁)牛顿被封为贵族,非常富有,担任英国皇家学会会长直到他 1727 年(85 岁)逝世。死后被埋葬在去世的著名人物汇集的威斯敏斯特教堂。他的墓碑上镌刻着:“让人们欢呼这样一位多么伟大的人类荣耀曾经在世界上存在(Let mortals rejoice that there has existed such and so great an ornament of Nature)。”

在牛顿之后,一大批力学家、数学家继承牛顿的研究,把经典力学提升到了新的高度。其中最值得提及的是拉格朗日(1736 年生于意大利的都灵,19 岁当上教授,1813 年卒于巴黎)和哈密顿(1805 年生于爱尔兰都柏林,1827 年 22 岁时被任命为教授,1865 年卒于都柏林),如图 1.2 和图 1.3。以他们的名字命名的方程和动力学理论与方法至今仍是物理系大学生的必修内容。经典力学的完美理论框架和它在各个科学技术领域(天文学、机械工程学等)取得的伟大成就使科学界普遍地接受了确定论。大家相信,只要精确地知道一个系统演化的方程和初值,就可以精确预言它任何时刻的运动,而且这个原则适用于宇宙间的万物。那些列不出方程或者解不出方程的相对复杂的系统的行为只是暂时不能精确预言,当人类的认识能力和解析技巧不断改进之后,总有一天它们对人类再无神秘可言。



图 1.2 拉格朗日(1736—1813)

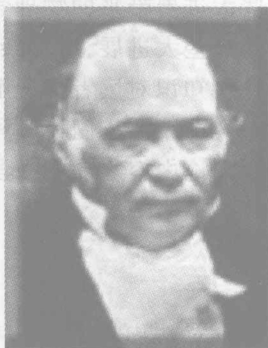


图 1.3 哈密顿(1805—1865)

在牛顿逝世不到 50 年之后,蒸汽机的发明带来了现代化的工业组织形式,也在一定程度上改变了物理学研究的方向。1785 年蒸汽机被成功地应用于纺织工业,1807 年被成功地应用于轮船和火车。然而,当时的蒸汽机的效率只有 5% ~8%。为了提高热机的效率,许多物理学家致力于研究热机的理论。1824 年卡诺提出并且利用热质说(已经被证明是不正确的)证明了著名的卡诺定理,即相同高、低温热源之间工作的一切可逆热机效率相等,并大于一切不可逆热机的效率。不久,克劳修斯提出热机循环中的守恒量不应该是热量,而应该是热量与温度的比,Q/T,从而提出了著名的克劳修斯不等式:$\oint \mathrm{d}Q/T \leqslant 0$,其中等号对

应于可逆循环,小于号对应于不可逆循环。这个不变量被命名为克劳修斯熵。这是熵增加原理的最初形式[8]。这只是一种经验总结,或者可以称为"唯象"的理论,虽然实际上表示了对一个全新的普遍自然规律的认识,但是还远远没有表述成能够阐明这个自然规律深刻内涵的形式。物理学历史上一再出现这种情况,科学实验已经积累了足够的素材,只等待一位有勇气独立思考的天才实现一次划时代的认识上的飞跃。玻耳兹曼(图 1.4)正好出现在这个时刻,然而他的命运和牛顿大不相同。在牛顿、拉格朗日、哈密顿等一大批力学家建筑起来的经典力学的辉煌大厦面前,玻耳兹曼和他倡导的统计物理学似乎显得非常渺小甚至荒唐,尽管历史最终证明玻耳兹曼提出的确实是科学真理,他和牛顿同样伟大,玻耳兹曼在他生前却历尽艰辛。



图 1.4 玻耳兹曼
(1844—1906)

玻耳兹曼 1844 年生于维也纳,家境极端困难,1863 年进入维也纳大学物理学和数学专业。1866 年 2 月 6 日他不满 22 岁就拿到博士学位,开始把统计学的思想引入分子运动论。1869 年,他在担任奥地利的格拉茨大学讲师期间提出了著名的熵和热力学第二定律的微观解释,也就是著名的玻耳兹曼公式:$S = k\ln\Omega$,其中 Ω 表示系统"包含微观状态的数目",k 就是如今物理系学生耳熟能详的玻耳兹曼常量[8]。然而,当时的科学界远远没有能够像今天这样深刻认识到必须极其小心地保护新生的科学幼苗。玻耳兹曼在维也纳大学任教时受到了以马赫为代表的实证论者的强烈批评及指责。他提出的熵与概率之间的联系遭到绝大多数物理学前辈的责难。在他任教的学校中,马赫开设的"归纳科学的历史与哲学"讲座吸引了大批优秀学生,包括玻耳兹曼的研究生在内。大多数学生仅仅选择玻耳兹曼为第二指导老师,这种精神压抑深深地刺痛了玻耳兹曼的自尊心。为了改善自己的环境,玻耳兹曼在 1900 年转向德国莱比锡大学,担任了理论物理学教授职务,但在那里,他同以奥斯特瓦尔德为代表的唯能论者之间的观点对立使他并不比在格拉茨大学更轻松。1902 年,当马赫因病辞去科学哲学教授之后,玻耳兹曼再次回到维也纳大学,可是情况并没有改善。从 1903 年到 1906 年,玻耳兹曼开设的讲座的听讲学生人数逐年减少。这位哲学争论中的孤独者于 1906 年 9 月 5 日(62 岁)在意大利一个度假旅店里上吊自杀。他被亲友埋葬在一个公园的小径旁,长时间被荒草淹埋的墓碑上只刻着他的著名公式:$S = k\ln\Omega$。

确定论规律先于深藏在大量随机现象深处的统计规律被发现,确定论科学比统计性科学容易得到承认。这也许不是历史的偶然,而包含发人深省的深刻

道理。各种人都希望听到确定的预言,哪怕这种预言来自只能勉强和我们交流的其他生物也好。这种一厢情愿的希望在科学中的反映也许是非常深远的。在20世纪我国从60到90年代理工科常用的一些大学物理教材中长期宣传这样的观点:在分子运动论中采用的统计物理方法不是必需的,不是因为其科学方法和思路与经典力学根本不同,而是由于分子数太多,求解牛顿方程太麻烦,不得已而为之,即所谓"求解这么多的牛顿方程既不可能,也不必要"。几十届物理学科和其他学科的学生都接受了这种说法。实际上,人们容易想起一个理所当然的问题:力学微分方程都是可逆的,如果统计物理学没有引入新的原则,热力学系统的不可逆性如何从可逆的力学微分方程中得出?这个问题必然引向这样的结论,即大量分子的随机运动会导致新的、与少量分子确定性运动根本不同的性质!实际上,在大学物理中一再讲授的玻耳兹曼热力学第二定律的概率解释完全能回答这个问题。它告诉我们,大量随机事件构成的系统会自动趋向于它的大概率状态。反过来,系统趋向于它的小概率状态就必需外界的干预(输入能量、信息等),绝对不会自动进行[8]。也许还可以追问一下,为什么对这类系统的少量次数行为的预言几乎完全被随机性支配(而不能从牛顿定律求解精确预言),只有大量多次的重复测量才会展示统计规律?用大家熟悉的投掷硬币作为例子,提高投掷过程的控制、测量精度可以排除对少量投掷结果预测的随机性吗?显然不能。设想我们投掷的不是硬币,而是不倒翁,那么行为预言的随机性就不复存在。看来关键在于系统演化结果对于扰动的敏感性。由于干扰总是存在,而且很难找到它们之间的关联和支配他们的规律,如果太敏感,运动就不可预言。任何一个事物运动遵循的压倒性的少数道理才是道理,才会导致可预言的秩序。大量不相关联的道理近于根本没有道理,运动实际上就没有秩序和可预言性。

也许还可以再问一个问题:既然大概率事件导致统计规律,而且统计量越大,涨落(小概率、随机性事件)越小,小概率事件越不重要,那么我们身边的绝大多数宏观系统的整体运动就应该基本上不依赖于涨落。因此,统计规律和概率描述毕竟远远不如确定性描述重要。对吗?我们认为此说法不妥。现代科学表明:定性、总体来看,系统越复杂,小概率事件越重要。例如你现在正在看我们的这本书,这个事件发生的概率其实小到了极点。首先地球必须在宇宙大爆炸以后的一个适当时间、地点产生,地球必须提供很合适的条件,使得它上面的物质微粒能够逐渐结合成足够大的分子,而且在一个阈值上产生生命,我们的父亲和母亲都必须在茫茫人海中相遇并且互相赏识,等等。这个小概率事件对我们当然太重要了。最近的一本畅销书《黑天鹅》(The Black Swan: The impact of the highly improbable)对此有较详细的描述。它说得是在发现澳大利亚的黑天鹅之前,欧洲人认为天鹅都是白色的,"黑天鹅"曾经是他们言谈与写作中的惯用语,

用来指不可能存在的事物,但这个不可动摇的信念随着第一只“黑天鹅”的出现而崩溃。从次贷危机到东南亚海啸,从“泰坦尼克号”的沉没到“9·11”事件,“黑天鹅”存在于各个领域。“黑天鹅”就是我们这里说的小概率事件。因此小概率事件的重要性也许可以作为复杂性度量的标准之一。我们将在本章后面再回到这个问题。

1.2 计算机与信息

另一个需要介绍的概念是信息,尤其是与计算机相关的信息概念[9,12]。信息的产生、传递和处理可能是贯穿人类历史的重要问题之一。从古代的结绳记事、烽火台,到后来的纸笔信件、印刷术、邮递员,到今天的无线电话、电视、电子邮件、因特网等,人类经历了巨大的进步。借助于人造的计算装置来传递、处理信息也已经有相当长的历史。打字机、算盘、机械计算机都可以看作对原始信息进行某种处理,以方便传递或其他目的的装置。再后来出现的电报、电话等已经是很具备现代味道至今还在使用的设备和方式。

说起现代计算机的发明历史,可能要提到1896年赫曼·霍列瑞斯报表公司为了完成一次人口普查而首先制造、使用的穿孔纸带或卡片输入的机械计算机。到了1940年前后,美国政府机构为了进行设计原子弹所需的大量计算,租用了IBM公司的穿孔卡片输入式电子真空管计算机,这台计算机的运算速度是每7秒完成一次乘法。1943年,25岁的研究生埃克特领导火炮弹道计算研究项目,1946年研制成功了被命名为埃尼亚克、用电子管和继电器完成计算逻辑控制的计算机,进行一次乘法的时间缩短到0.003 s。计算方法理论和计算机理论的创始人之一冯·诺伊曼就是在这期间开始参加计算机的改进,提出、奠定了现代的程序存储计算机设计理论的基础。1949年世界上第一台程序存储计算机在美国诞生,包含3600个真空管、10000个锗二极管,主频为1 MHz。它在1952年正式开始运行,1962年光荣退休。值得一提的是,中国科学院计算机研究所研制的“中国104计算机”在1959年制成,包含4200个真空管、4000个二极管,每秒完成10000次运算,内存1048字节(浮点40二进制位)。使用一台磁带机作为外存,耗电70 kW。使用一台专用发电机组,占用一座不太大的楼房。由此可见,我国当时与世界先进水平的差距并不十分大[9]。

冯·诺伊曼(图1.5)的历史可能给我们新的启发。有趣的是他并不是一个工程师,而是一个数学家。他是美籍匈牙利人,1903年生于匈牙利的布达佩斯。1911—1921年,冯·诺伊曼在布达佩斯的卢瑟伦中学读书期间就发表了第一篇数学论文,当时冯·诺伊曼还不到18岁。1930年接受了普林斯顿大学客座教授的职位,1931年成为该校终身教授。1951年至1953年任美国数学会主席。

1957 年在华盛顿去世，终年 54 岁。

冯·诺伊曼在算子理论、集合论、群论、算子代数（冯·诺伊曼代数）、博弈论（创立者）、格论、连续几何、理论物理、动力学、连续介质力学、气象计算、原子能和经济学等诸多领域都进行了开创性工作，并作出了重大贡献。但他对人类的最大贡献仍旧是对计算机科学、计算机技术和数值分析的开拓性工作。1945 年，他和埃尼亚克机研制小组的富有创新精神的年轻科技人员们发表了一个全新的“存储程序通用电子计算机方案”，方案中新机器由五个部分组成，包括运算器、逻辑控制装置、存储器、输入和输出设备，程序和指令采用了二进制。最为重要的是指令和数据一起存储的程序存储方式。这种综合设计思想导致了上述的第一台程序存储计算机的诞生以及著名的“冯·诺伊曼计算机”的基本概念，被誉为“计算机发展史上的一个里程碑”。


图 1.5 “计算机之父”冯·诺伊曼（1903—1957）

这些故事告诉我们掌握理论知识，同时对实际问题满怀兴趣，时刻准备向实践专家学习的重要性。改变人类命运的重大发现大多数是由这样的人完成的。

现代计算机的出现和不断加速的性能改进、成本降低已经、正在、将要本质性地改变包括物理学在内的一切科学。计算机使得以前许多难于直接观测的自然现象可以借助于计算机的数据处理或者模拟计算而直接或间接地得到观测，许多难于或根本不可能解析地预测的现象可以通过快速数值计算来预测，许多原来淹没于噪声的现象得以分辨，许多复杂的模型和科学猜测得以验证。并且，许多概念很可能由于计算机的普遍使用和不断改进而发生根本性地改变。伴随着计算机飞速发展的通信技术自然地提出了量度、刻画“信息”的要求。

信息的科学定义几乎与现代计算机的出现同步，而且密切相关。与熵的概念不同，到现在为止，信息的科学定义还没有统一。更多地得到公认的定义是所谓的“香农定义”。

香农（图 1.6）1916 年诞生于美国密歇根州。他的大部分时间是在贝尔实验室和麻省理工学院度过的。在二次世界大战时，香农是一位著名的密码破译者。1948 年香农长达数十页的论文《通信的数学理论》成了信息论正式诞生的里程碑。2001 年香农在马塞诸塞州辞世，享年 85 岁。贝尔实验室和麻省


图 1.6 香农（Claude Elwood Shannon）（1916—2001）

理工学院发表的讣告都尊崇香农为信息论及数字通信时代的奠基人。

香农定义的信息可以表示为：$S=-k'\ln P$，其中 S 表示信息，单位为比特，P 是通信所叙述事物的可能状态数目；$k'=1/\ln 2$ 使得对具有两种等可能性的事件作出明确判断时所需的信息为一个"比特"。所以香农信息就表示从系统的各种可能状态中确定一个所需的信息比特数。有趣的是，香农信息的定义式与熵的定义式非常相似，实际上二者都表示系统的可能状态数，但香农信息强调在人为干预下从多种可能状态向少数或唯一状态的过渡。这时系统的无序程度降低，所以需要输入的信息（香农信息）称为"信息熵"或者"负熵"。也可以说信息熵是对系统"无知程度"（"信息量缺省程度"）的度量。如果令这两个量定义式中的两个比例常数相等，就可以导出：在热力学温度 T_k 下处理一个比特的信息需要 $kT_k\ln 2$ J 的能量。这也就是比特的热力学意义。

我们将在 1.3 节中介绍与信息概念联系的最早的复杂性定义。

1.3 算法复杂性

"现代电子计算机之父冯·诺伊曼早就说过，'阐明复杂性和复杂化概念应当是 20 世纪科学的任务，就像 19 世纪的熵和能量概念一样'。看来，20 世纪的科学没有完成这个任务，要把它传递到新的千年。"[13] 一个比较早，也比较为大家注意的复杂性定义是所谓算法复杂性[13-15]。郝柏林院士曾在一篇影响很大的论文中对这种复杂性作了十分简练精辟的介绍[13]。本节将比较多地引用郝柏林院士的原文（加双引号的部分）。

"算法复杂性是 1964—1966 年由索洛莫诺夫、科尔莫戈罗夫和柴廷分别独立提出的。粗略地说，算法复杂性就是产生特定的图形花纹（或符号序列）的最短程序的长度与图形花纹（或符号序列）本身的大小之比的极限——当后者趋向无穷时的极限。这里'长度'和'大小'均按二进制位数计，而'程序'则是在普适的理论计算机上执行。"[13]

这种复杂性定义建立在这样的理解上：一个实际系统总是通过人们的某种观测被认识的，而各种观测通常都产生一个或一些数据序列。例如脉冲星的光信息或者射电信息序列、人类的心电图和脑电图序列、托卡马克热核聚变装置的各种光、电仪器的测量输出数据序列等。因此一个实际系统常常用一个或一些数据序列来代表。这个思想可以推广到代表实际系统的符号序列（图形花纹在现代的数字技术意义上也可以被一个或一些数据或符号序列来表示）。如果（如同在 20 世纪中叶那样）大家特别重视再现这些数据或符号序列的计算机程序的长短，就可以用程序的长短来表示相应实际系统的复杂性的大小。这个定义可以写为：$\kappa_T(x)=\lim\limits_{|x|\to\infty}\left[\min\{|p|/|x|\}\right]$，其中 x 表示一个数据或符号序

列，$|x|$表示这个数据或符号序列的长度，$|p|$代表产生x的程序长度。

"不难明白，上述算法复杂性其实是随机数的一种判据。为写出实质上比给定数更短的程序，需利用该数包含的某种规律，若无规律可循，依定义该数就是随机的，相应的最短程序只能是在打印语句中照抄该数。程序长度比该数多出PRINT五个字母，取无穷极限后就没有差别了。"[13]

显然，这种定义必然导致的结论是：系统越随机就越复杂，算法复杂性单调地依赖于随机性。这代表了比较早期的认识。当科学界普遍接受了20世纪60年代以来的一些物理学具有根本性的新认识之后，大家根本地改变了这种认为越随机就越复杂的观点。我们将在下面几节介绍这些物理学的伟大进展。

1.4 非平衡统计物理学、耗散结构与协同学

从本节开始，我们将简洁地介绍20世纪60年代以来的一些物理学伟大进展，这些进展改变了人们以算法复杂性为代表的对复杂性的早期认识。首先要介绍的是普里高津提出的耗散结构理论、非平衡热力学与非平衡统计物理学。

玻耳兹曼的成就实际上必然引起关于有序和无序的许多问题，例如：涨落一定引起无序吗？世界一定会因为熵增加原理而越来越无序吗？达尔文的物种进化学说主张世界会由于"物竞天择"而越来越有序，这说法有理吗？与熵增加原理相容吗？如果不相容，哪个错误？如果我们作为物理学家肯定熵增加原理，否定达尔文的物种进化学说，那么如何解释许多系统自发地趋于（自组织向）更加有序？如果肯定达尔文的物种进化学说，那么相应的、作为熵增加原理的发展或补充的物理学原理是什么？这种新原理可能阐述自组织的共同规律吗？



图1.7 普里高津
（1917—2003）

普里高津（图1.7，原比利时布鲁塞尔自由大学索尔维国际物理与化学研究所所长、非线性与复杂性研究中心主任、美国奥斯汀得克萨斯大学统计力学与热力学研究中心主任、1977年诺贝尔化学奖得主）天才地提出了耗散结构理论、非平衡热力学与非平衡统计物理学[16-18]，成功地回答了这些问题。简而言之，这些理论阐明：远离平衡的开放系统的行为根本不同于遵从熵增加原理的平衡孤立系统，它会自组织向有序。开放系统中出现这种行为的关键是外界向系统输入能量、物质或信息，即所谓"负熵流"。这种条件会使系统自发地产生有序的"耗散结构"，也就是说，这时的涨落会导致更加有序！这是在此之前人们以为只有生物体系才具有的复杂进化特

征。然而,普里高津用大量可以解析推导的实际系统模型的演化规律说明,许多物理学家习以为常的“简单系统”就能展示耗散结构的自组织形成。

图 1.8 显示了贝纳尔对流的斑图。在两层平行的玻璃板之间的流体在温度和其他宏观性质稳定且均匀时处在平衡态,但如果增大上、下两层间的温度差,偏离平衡的结果就会导致流体的宏观运动。这种运动在温度差不太大时会导致种种有趣的稳定空间花样(斑图)。图 1.8 显示的是所谓“蜗卷”。普里高津解析推导出这种运动结构的性质与规律。如果同意在负熵流存在时系统会自发地发展向更复杂,那么系统在远离平衡、开放的条件下从随机自发地走向有序这个事实就充分地说明随机并不一定比有序更复杂,也许它更简单。

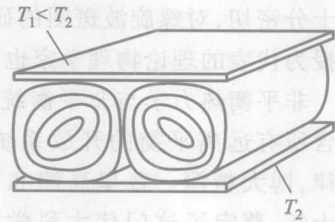


图 1.8 贝纳尔对流的斑图(引自文献[19])

图 1.9 显示了贝鲁索夫–扎巴廷斯基化学反应的斑图。这类反应的反应物和生成物可以有许多种。图中显示的是硫酸铈、丙二酸、溴酸钾溶于硫酸进行反应形成的螺旋波斑图。反应形成斑图的条件同样是远离平衡的开放系统,这里远离平衡、开放的实现是按照一定时间、速率将反应物泵入(或泵出)体系而得

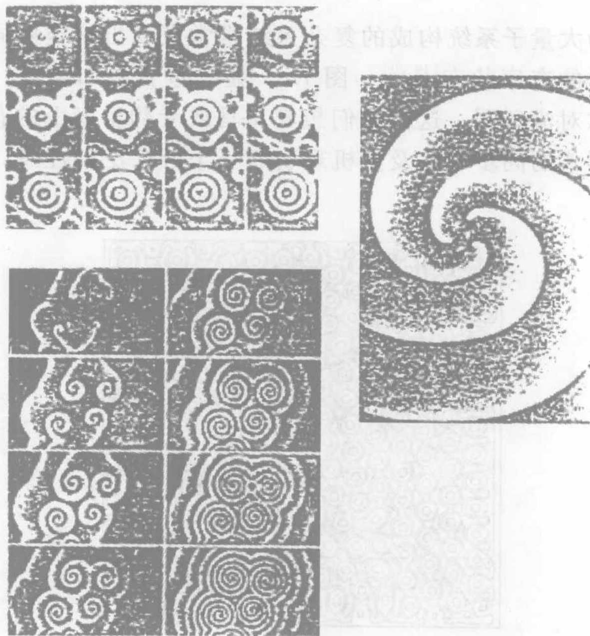


图 1.9 贝鲁索夫–扎巴廷斯基化学反应的斑图(引自文献[19])

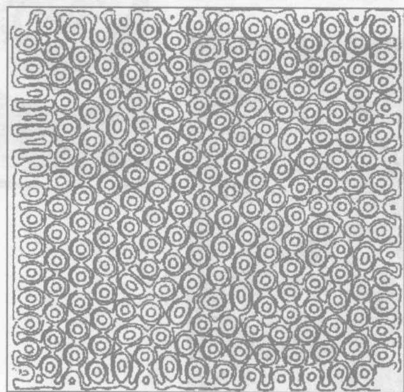
到的。螺旋波斑图在自然界中很常见,海螺壳上的斑图就是大家最熟悉的例子。20世纪90年代之后由于发现心脏等关键器官的行为与功能与螺旋波斑图的关系十分密切,对螺旋波斑图的研究重新掀起了高潮。我国以北京师范大学胡岗教授为代表的理论物理学家也在这个方向做出了一流的成绩。

非平衡热力学与非平衡统计物理学原则上应该包含所有远离平衡的开放系统的热力学、统计物理规律,博大精深。普里高津和他的弟子们为之奋斗几十年,奠定了这门伟大科学的基础,然而,这门科学还远没有完善,仍旧是理论物理研究的一个前沿[16-18]。


图 1.10　哈肯(1927 至今)

与普里高津同时代的哈肯(图 1.10,斯图加特大学理论物理研究所所长,获得英、德玻恩奖,美国迈克尔孙奖,德国联邦大十字功勋奖)创立了协同学[19,20]。协同学强调远离平衡开放系统中各部分之间互相协作,形成整个系统有序结构的规律与理论。1960年在美国贝尔电话公司任顾问时,哈肯曾经致力于提出解释激光的理论,认为激光是大量相干态的微观粒子协同运动的结果。这成为他研究协同行为的开始和他研究协同学最常用的例子。

协同学认为大量子系统构成的复杂系统常常表现出这类协同作用,从而自组织向各种各样的有序状态[19,20]。图 1.11 显示包含更加精巧、由更多协同作用导致的贝纳尔对流斑图。这使我们想起斑马或者豹子身上的花纹。近年来,自然界中各种形式的同步现象及其机理引起了十分广泛的注意,这实际上是协


图 1.11　更加精巧的贝纳尔对流斑图(引自文献[19])

同学研究的继续。由于国内已经出版的两本复杂网络专著[21,22]都已经用一两章的篇幅对同步研究的前沿作了介绍,本书不再仔细介绍。

同步的研究可能起始于1665年,从荷兰物理学家惠更斯在病床上观察到钟摆同步开始。大群萤火虫的同步发光现象可以代表许多群体生物的集体一致行为,同样是大量的子系统表现出协同作用,从而自组织向有序状态的例子。近几年来,同步的研究扩展到对生命系统中各种关键行为和规律的理解,正在蓬勃发展,显示出十分强盛的生命力。

1.5 临界现象与自组织临界现象

远离平衡的开放系统所接受的负熵流会使系统自发地从平衡、均匀的完全随机状态走向有序,这可能是普里高津和哈肯的工作告诉我们的最重要结论。他们还证明了这种进化现象在许多典型的简单系统中也容易被观察到。如果我们认可一个共识,即进化就是自发地从简单走向复杂,那么就必须承认,虽然有序、规则的运动演化简单,但是平衡、均匀的完全随机状态更简单。这很可能是大家修正算法复杂性导致的"越随机越复杂"认识的开始。那么,随机和有序之间的过渡是否总是从简单走向简单?如果是,复杂又在哪里?

我们将在1.6节中介绍,如果从有序状态更加远离平衡,系统常常会再次过渡到一种随机状态,不过它比平衡、均匀的完全随机状态更高级(也就是更复杂)。而很多人认为复杂就位于这种过渡之间。不过,要理解这种现象,本节必需首先介绍与普里高津和哈肯大概同时的,由威尔逊(图1.12)发现的另外一项物理学伟大成就。



图1.12 威尔逊
(1936至今)

威尔逊生于美国马塞诸塞州。1971年(35岁)就任康奈尔大学教授,同时把重正化群的方法用于临界现象研究,建立二级相变理论,并且因此获得1982年(45岁)诺贝尔奖。本节对他的成就的介绍将从大家司空见惯的现象开始。

水开了会变水蒸气,冷了会结成冰,这似乎是小孩子都知道的事。非常多的物质都会发生类似的被称为"相变"的三态变化。这一类相变的一个特征是具有两相共存的临界变化阶段,例如在一个密封的玻璃锅中可以看到沸腾的水不断地变为水蒸气,当大河解冻时可以看到水面飘浮的冰不断地融化为水。另一个特征是相变时有一些物理量会发生突变,例如水蒸气凝结为水时会释放出"相变潜热",水结冰时会发生突然的体积膨胀,甚至破坏装水的容器。然而,可能大家还不知道,在一个特殊的状态下水的相变完全没

有这些性质。如果把一些水密封在一个玻璃泡中，控制它的温度和压强，使其非常接近于 0.01℃和 610.615 Pa(4.58 mmHg)[23]，就会发现玻璃泡中一片雾蒙蒙，根本不知道是水、汽还是小冰粒。如果温度和压强严格地处在这个被称为"水的三相点"状态的参量数值，那么不但是用肉眼，而且用任何测量方法都不可能识别水、汽、冰三相之间的差别，自然三相之间的相变也就一定是"连续的"，不可能再具有上述两个特征。三相点之外的、具有上述两个特征的一般物态相变称为"一级相变"或"不连续相变"，而在三相点发生的物态相变称为"二级相变"或"连续相变"。统计物理中讨论的连续相变通常指"临界点"以上的相变，即跨过临界点的相变。对水来说，液相与汽相间的转变曲线是温度与压强的函数。当温度或压强超过某特定的值后，液相与汽相间的差别消失，此特定点就是临界点，其压强为 22.12 MPa，温度为 374.15 ℃。在一级相变中新的相是借助于两相共存特征从旧的相中逐渐长大的，例如要制造个人计算机中的 CPU 芯片，首先要制造高完美的硅晶体。一般的方法是把一锅硅溶液的表面保持在接近于结晶的温度和压强下，然后伸入一根高完美硅晶体作成的籽晶，使结晶仅仅围绕着籽晶进行。能够这样做的条件是籽晶和硅溶液可以在相变的临界条件下共存。在连续相变中不可能有两相共存，相变在物质各处同时突然发生，所以这种相变也称为"临界现象"。如果相变状态只是很接近、并不严格等于连续相变的临界点，那么两相仍然可以区分，但相变是同时在很大一个范围内发生的。在旧相中许许多多地方同时出现的新相大大小小、形状各异，与旧相"你中有我，我中有你"，形成图 1.13 所示的若隐若现、此起彼伏、互相嵌套、跃跃欲变的"花斑"[23]。

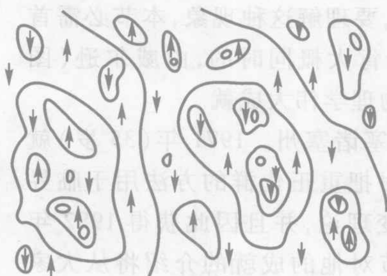


图 1.13　花斑的示意图(引自文献[23])
向上的箭头表示新相，向下为旧相

属于连续相变的物态变化还很多。例如磁铁状态(铁磁质)与基本无磁性的状态(顺磁质)之间的铁磁相变、超导态与正常态之间的超导相变以及合金的有序－无序相变等。

我们用黄铜作为例子来说明合金的有序－无序相变。图 1.14 显示了黄铜的有序(右图)和无序(左图)结构。在完全有序状态，铜原子都处在立方晶格的中心(图中黑点)，锌原子都处在立方晶格的角上(图中空心圆)。温度越高，排

错位置的原子可能越多,但基本还是有序的。然而,当温度达到临界值(绝对温标 742 K)以上,两种位置就突然变成完全等价,不可能知道什么排列才是有序,达到了左图所示的无序状态。20 世纪 30 年代著名物理学家布拉格提出一个“序参量”来描述这种相变,序参量的定义是

$$\xi = \frac{R - W}{R + W}, \tag{1.1}$$

其中 R 是正确位置的原子数,W 是错误位置的原子数。在完全有序状态,$W = 0$,$\xi = 1$,在临界点以下,$W \neq 0$,但仍能分出对错,而且对的多,因此 $0 < \xi < 1$。在临界点以上,再也分不出对错,所以 $W = R$,$\xi = 0$。后来发现,对于所有的连续相变,都可以定义一个序参量,使它在临界点的一边为零,表示相对的无序状态,而在临界点的另一边不为零,表示相对的有序状态[8,23]。序参量成为相变的最重要参量。

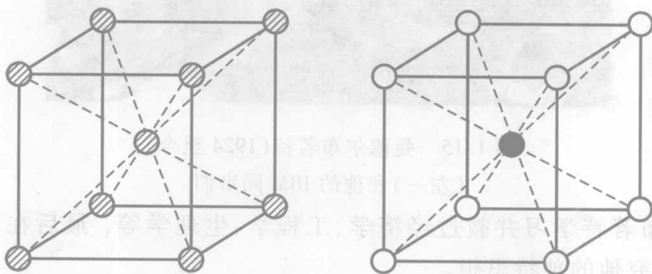


图 1.14 黄铜的无序和有序结构(引自文献[23])

实验科学家们早就发现连续相变的序参量在临界点附近都遵循普遍的幂律(无标度律)

$$\xi \propto |t - t_c|^{\beta}, \tag{1.2}$$

而且对许多不同物质的连续相变,幂律的标度因子 β 是相同的。式子中 t 是温度或其他参量,t_c 是相变的临界参量值。在许多理论物理学家的努力之后,威尔逊从理论上证明了序参量的这个普适规律,并且解析地得到了与实验符合的指数因子 β 的数值,并因此获得了诺贝尔奖。

物理学的发展很快地使人们发现遵从序参量标度律的并不仅仅是一些物态的变化。以类似序参量普适规律的幂律为标志的临界现象涉及更广泛的领域。可以举出另一个重要的临界现象例证。设想用大小相同的导电球和绝缘球排列成一层,铺满一个正方形的平面池子,且两种球在池子中的密度比 P 可以连续地变化。理论和实验研究都证明:在 P 小于一个阈值 P_c 时,导电球连接成为一个横跨池子的连通分支,从而使电流能够流过整个池子的可能性为零,而在 P 等于 P_c 时,横跨池子的最大导电连通分支将突然出现。这种临界现象同样很好地遵从上述的序参量标度律。它并不表示物态的变化,但也可以等价于一种相变,被

称为“逾渗相变”。

为什么不同物质发生连续相变时都有相同的规律？发生连续相变时各相在大范围内出现边界犬牙交错构成的花斑表示什么？规律普适性和花斑有什么关系？为了回答这些问题，我们需要介绍曼德尔布若特(图 1.15)倡导的分形[24]。



图 1.15　曼德尔布若特(1924 至今)
(左一)和他的 IBM 同事们

曼德尔布若特学习并教过经济学、工程学、生理学等，最后在 IBM 公司工作，潜心地研究他的独特思想。

曼德尔布若特认为世界和科学充满了不光滑，传统的数学(几何学、微积分、微分方程等)对于处处光滑的系统描绘并不理想。例如，在 20 世纪 20 年代英国理查逊曾调查了西班牙、葡萄牙 、比利时、荷兰对共同边界长度的官方估计，发现两个国家对一段共同边界长度的估计常常相差 20%。图 1.16 显示了一个模拟程序描绘的海岸线被不断放大时(每一幅图形都是它左边图形中白色方框内图形的放大)显示的处处不光滑而且“自相似”的特征。大家想想，难道我们周围有哪一个物体的边界线被不断放大时不像这样吗？

另一个例子是曼德尔布若特用图像描述的 IBM 公司股票在 1959—1996 年间的价值波动记录(图 1.17(a)，纵轴单位：$ 10)，图 1.17(b)显示每天的相对涨落。这些图形也处处不光滑，而且显示统计的自相似性。

曼德尔布若特认为用传统的长度、面积、体积等数学概念不能描述这些实际图形，必须引入全新的概念和定义。他把这种图形称为“分形”。分形就是处处不光滑，而且具有严格的或者统计的无穷自相似结构的图形。描绘分形的关键在于找到“跨越所有尺度的自相似法则”。也就是说，用任何倍数的放大镜(标度)看分形，图形都一样。关键在于找到图形的自相似法则。

一个最简单、最常用的引入分形描述关键量的模型是所谓的“康托尔三分

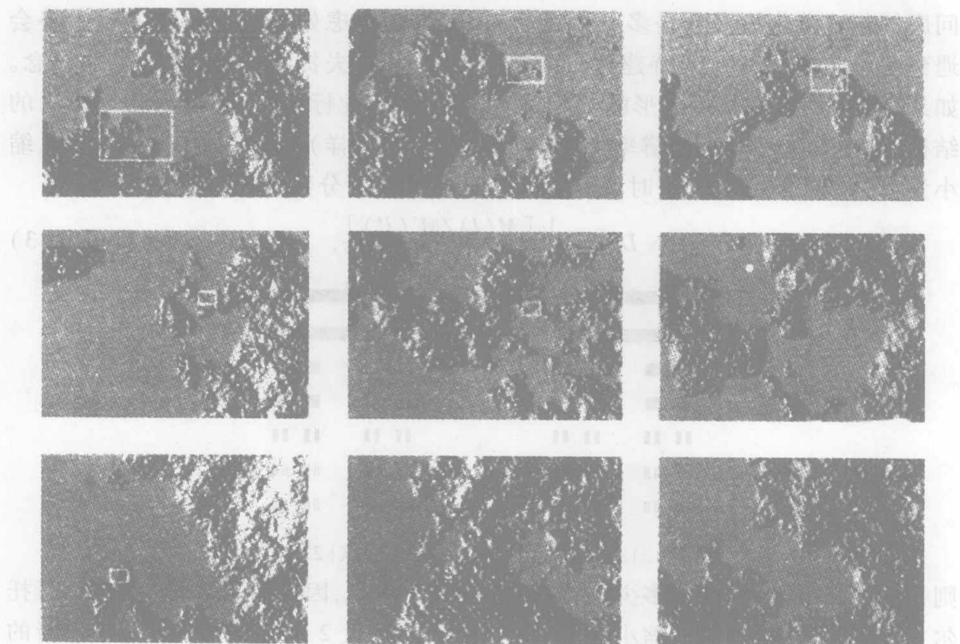


图 1.16　一个模拟程序描绘的海岸线被不断放大时（每一幅图形都是它左边图形中白色方框内图形的放大）显示的处处不光滑而且“自相似”的特征（引自文献[23]）

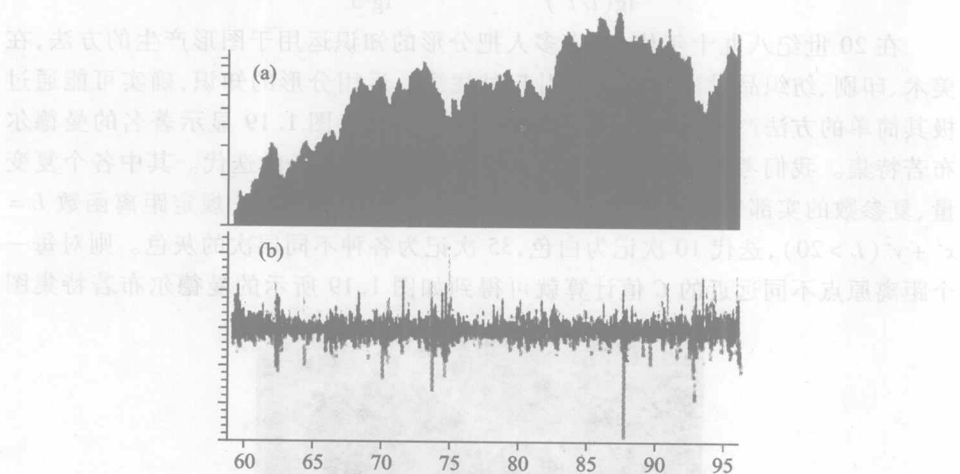


图 1.17　曼德尔布若特用图像描述的 IBM 公司股票在 1959—1996 年间的价值波动记录（引自文献[23]）

集”，如图 1.18 所示。不停地去掉一条线段的中间 1/3，剩下的就是康托尔三分集。无穷次分割后，剩余点子（无限短的线段）的数目无穷多，但总长度是零。这可能是最简单的处处不光滑，而且具有严格的无穷自相似结构的图形。如果

问康托尔三分集的维数是多少？运用传统的、仅考虑处处光滑图形的概念将会遇到困难。曼德尔布若特建议使用数学家豪斯多夫提出的“分数维”的概念。如果我们用 l 表示量度图形的标尺长度，M 表示用此标尺量度（忽略小于标尺的结构，好像看不到放大分辨率达不到的图形细节一样）时得到的量度数，当 l 缩小为 l'，M 增大为 $M'(l')$ 时，把被量度图形的维数（分数维）扩展地定义为

$$D = -\frac{\lg[M(l)/M'(l')]}{\lg(l/l')}, \tag{1.3}$$

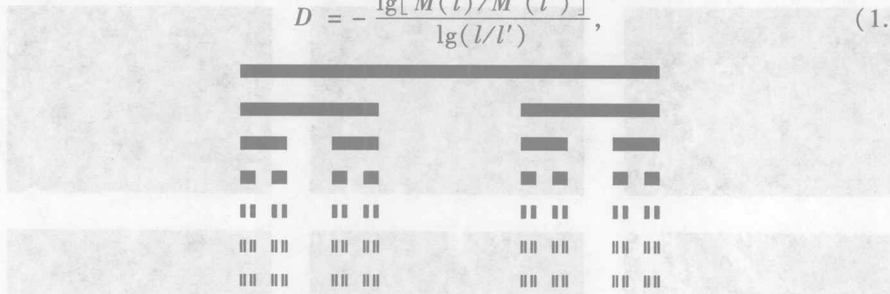


图 1.18 康托尔三分集（引自文献[23]）

则当图形光滑时，l 缩小多少倍，M 一定增大多少倍，因此 D 是整数，而对于康托尔三分集这样的分形，l 缩小为 1/3 时，M 只会增大 2 倍（由于看到了一个新的 1/3 长度的空缺），因此分数维

$$D = -\frac{\lg[M(l)/M'(l')]}{\lg(l/l')} = -\frac{\lg(1/2)}{\lg 3} = 0.6039.$$

在 20 世纪八九十年代，有许多人把分形的知识运用于图形产生的方法，在美术、印刷、纺织品设计等学科中引起过注意。运用分形的知识，确实可能通过极其简单的方法产生非常复杂、有趣的图形。例如，图 1.19 显示著名的曼德尔布若特集。我们考虑遵从 $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$ 关系的复平面上的迭代。其中各个复变量、复参数的实部表示图形平面的 x 坐标，虚部表示 y 坐标。规定距离函数 $L = x^2 + y^2 (L > 20)$，迭代 10 次记为白色，35 次记为各种不同层次的灰色。则对每一个距离原点不同远近的 C 值计算就可得到如图 1.19 所示的曼德尔布若特集图

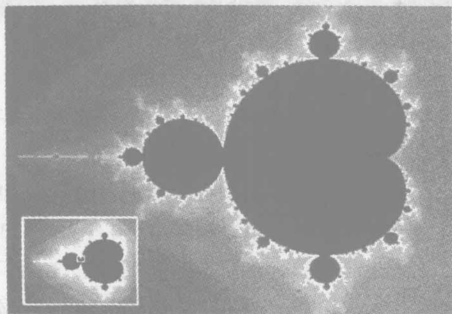


图 1.19 曼德尔布若特集（第一幅迭代纪录）（引自文献[23]）

形。图1.19中左下角的插入图内的白色小方框内的图形被放大表示在图1.20中的插入图内。图1.20中的插入图内的白色小方框内的图形被放大表示在图1.20本身中。如此不断放大,会显示各种自相似图形,在一定时间后反复地重复出现,然而整体上又不会简单重复,似乎会无穷无尽地创造出魔幻般的图形集锦。

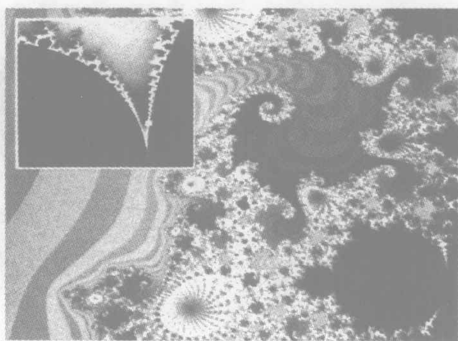


图1.20 曼德尔布若特集(第二、三幅迭代纪录)
(引自文献[23])

让我们回到连续相变花斑的问题。显然,花斑就是分形,它的出现表示各相之间的相互作用可以跨越各种长度使相变发生(不一定仅仅在相边界附近的分子之间相互作用才足够产生新相)。在连续相变临界点附近,分子间的关联长度趋于无穷大,任何涨落都可能在旧相中形成任何尺寸的新相。这时相变的特性与物质特性(晶格结构、晶格对称性、晶格常数、晶格缺陷等)无关,因此不同物质发生连续相变时都有相同的规律。这就是规律普适性和花斑的关系,也是威尔逊对临界现象普适标度律进行理论推证的主要思想。物理学的各次大进展的历史都说明,定量的、强有力的解析计算方法当然十分重要,但是物理学的大进展更依赖于物理新思想、新理解、新图像的建立。有了新思想才能、就能、常能想出合适的定量表述。

1987年巴克、汤超和威森非尔德进一步提出:自然界可以自发地自组织向一个临界状态,这个临界状态对微扰显示最丰富的反应,而且,自然界经过亿万年的演化,大多数系统已经达到自组织临界状态,所以世界才如此丰富多彩。



图1.21 巴克(1948—2002)

巴克(图1.21)生于丹麦。2002年由于白血病逝于哥本哈根大学教授任上。他一生在科学上的创见不少,但是最成功的当属自组织临界现象的发现。汤超(图1.22左)是中国科技大学文化大革命后的毕业生,在美国获得博士学位后到巴克的课题组工

作,得以参加并列名于这项以"BTW 理论"命名的伟大成果。晚些时间(1983年)同样毕业于中国科技大学,1988 年也在美国获得博士学位后到到巴克的课题组工作的陈侃(图 1.22 右)作出了更多自组织临界现象研究。这两位中国人在这项伟大成就中作出了贡献。

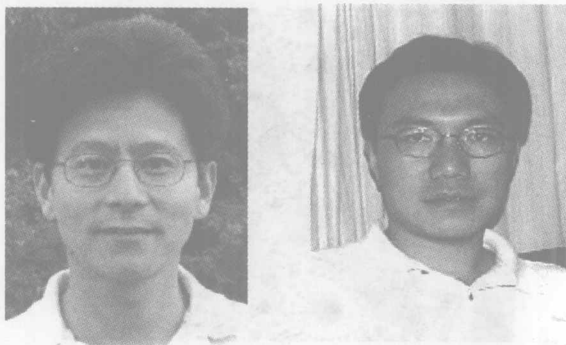


图 1.22 汤超(左)和陈侃(右)

说明自组织临界现象的最简明例子可能是沙堆。如图 1.23 所示,夕阳照耀下,连绵不断的沙丘幻化出千万种姿态,但是沙堆的斜率常常相同。这是由于如果斜率太大,沙子就会滑落到地面;而如果斜率太小,沙漠中的风沙又会使沙子不断地沉积。因此,存在一个沙堆斜率的稳定阈值。沙堆的斜率小于阈值时,不会显示宏观的流动,运动无序;斜率大于阈值时,一定显示宏观的流动,表示有序运动。系统会自组织向它的阈值,并且这个阈值对应的状态是稳定的。如果微扰使系统偏离这个状态,偏离会自动地逐渐消失。所以被称为"自组织临界现象"。



图 1.23 沙堆

1987 年夏天巴克曾在北京大学的讲台上为大家演示一点一点加沙子时所引起的沙堆的崩塌沙子流。他想说明的除了沙堆会自组织向它的阈值外,还有加沙子可能引起的"雪崩"现象。沙堆上每粒沙子的局域状态都是非常不同的,

有的摇摇欲坠，有的相当稳定。在不同地方加一粒沙子可能完全没有任何影响，也可能引起一大堆沙子从顶部一直滑落到底。巴克和他的助手们曾经构造了一个模型来模拟沙堆的演化，他们假设平面上每个方格子中有一竖列沙子，高度可能为0,1,2或3。高度超过3的列就会崩塌，使得高度一下子减少4，同时使它的4个相邻格子中各增加高度1，正像一个实在忙不过来的办公室人员把桌上的待处理文件分给每个邻居一份。这种崩塌可能引起一系列的后续崩塌，也就是雪崩。他们用50×50的格子点阵计算证明了这个非常简单的计算机沙堆模型会自组织向临界状态，而且得到了临界状态下雪崩满足的幂律：

$$D(s) \propto s^{-\gamma}, \tag{1.4}$$

这里 s 表示一次雪崩涉及的点阵空间尺寸，$D(s)$ 表示这种尺寸的雪崩出现的概率，$\gamma \approx 1.1$。这正是前面所介绍的连续相变序参量在临界点附近遵循的幂律，不过这时出现在远离平衡开放系统中的类似规律是系统自组织达到的稳定规律。不难想象，当沙堆的斜率小于阈值时，只可能有比较小的雪崩，大的雪崩很少，而从顶部一直滑落到底的雪崩可能根本不会有。反之，当沙堆的斜率大于阈值时，大的雪崩很多，而小的雪崩很少。只有当沙堆的斜率等于阈值时，各种大、小的雪崩才都会出现，而且不同的雪崩尺寸出现的概率服从上面所示的规律。这也就是说，沙堆在所有偏离临界的状态下对微扰的响应都不够敏感、丰富，只有在临界状态时才能够对微扰显示最敏感、最丰富的响应。

巴克所著的《大自然如何工作》一书[25]中报道了几个实验研究小组进行的旨在验证(1.4)式的实验。其中最精确的一个是图1.24所示的挪威奥斯陆大学几位学者进行的大米堆实验。他们使用各种不同品种和数量的大米进行了一年多的实验，每次实验连续42小时。米粒的运动由一个视频检波为2000×500并能覆盖整个活动区域的CCD摄像机跟踪。镜头每15秒闪光一次。数字化的信号被送入计算机中进行处理。不同大小的大米堆产生的雪崩概率分布记录在图1.25所示的几条曲线中。双对数坐标平面上的斜直线尾部说明上述的幂律是成立的。已经从理论上证明各条曲线的水平头部是由于实际测量的次数有限导致的，在实际中不可避免。

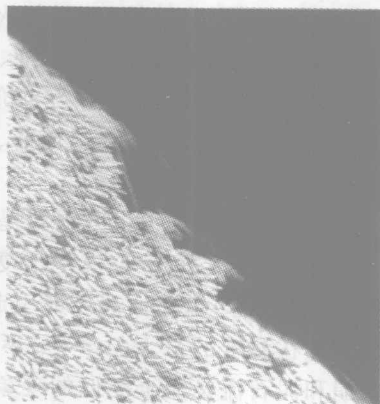


图1.24 大米堆的侧面(引自文献[25])

巴克相信：千千万万个自然界中的复杂系统都会按照类似的道理自组织向它们的临界状态，而且经过了不知多少年的自组织演化过程，它们早就达到了临

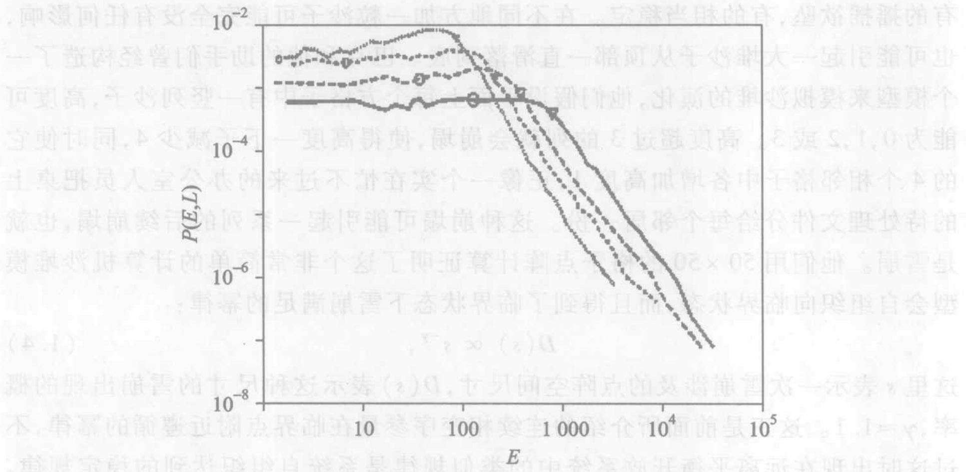


图 1.25 大米堆的雪崩幂律(引自文献[25])

界状态。自然界中天然存在的万物都已经处在一个会对任何干扰产生最敏感、最丰富响应的状态,能够不断地呈现出丰富多彩、千变万化的形态、性质和结构的演化。这些演化就是不断由干扰产生偏离临界态和偏离后系统重新自组织向临界态的过程。到 1996 年巴克的《大自然如何工作》一书的英文版在纽约出版时,关于自组织临界现象的论文已经有 4 000 篇以上。这些研究涉及岩层与地貌形成、河网与海湾结构、地震与火山爆发、星震与星云塌陷、黑洞与日辉耀斑、夸克与胶子团簇、生态与物种灭绝、变异与生命进化、噪声与全球变暖、人口与环境污染、大脑与神经网络、市场与价格波动、股票与金融危机、城市与交通堵塞、湍流与森林火灾、疾病与舆论传播、断裂与纤维生长。因此,临界现象,尤其是自组织临界现象是十分普遍的。

可以回顾我们在 1.1 节末尾提到的一个观点:系统越复杂,小概率事件越重要。可能没有人同意沙堆模型很复杂,但是在自组织临界状态随机地加上一粒沙子(可能的最小微扰)都可能引起大大小小的雪崩。显然最大的雪崩会发生在沙子加在沙堆的最大斜率(最不稳定)之处的时候。常常引起重大灾难的真正雪崩和泥石流是完全类似的现象,而预言这些灾难是极其困难的。这说明看来很简单的系统可能会自组织向相当复杂的稳定临界状态,其复杂性表现为可能的最小微扰引起的各种非常不同的后果。

巴克和他的学生施涅盘(K. Sneppen)曾经研究了一个描述生物种群互相捕食关系构成的生态网络演化模型[25]。这显然是远比沙堆复杂的一个系统。在演化的开始许多位于规则格子上的种群被随机地赋予各自的“适应因子”。然后,在每个离散演化的时间步,选择适应因子最小(相当于处在沙堆的最大斜率处的沙子)的种群及其最近邻,令它们都(因最不适应环境)发生突变,从而随机

地变化到拥有另一个适应因子的种群。用巴克的话来说,这正像一个经理解雇效率最差的一个工人,连带他的两个最亲密合作者,然后到街上随意雇来三个年轻人代替它们。这个模型一直演化下去,在经过一个非常长的瞬态过程之后,将达到一个稳定的自组织临界状态。这时所有种群的适应因子趋向一致,都大于一个适应因子阈值,小于这个阈值的种群都将灭绝。已经证明,这个模型的自组织临界状态极端敏感地依赖于微扰。不同微扰导致不同种群构成的最后稳定、适应环境的生态网络。每次微扰导致的少数种群演化都会导致一系列其他种群的演化,也就是种群灭绝和新生的“雪崩”。这些雪崩也对应考古学近几十年来发现的生物种群的大灭绝或者“大爆发(许多新物种很快地产生)”,它们也遵从自组织临界现象的普适标度律。这个包含不断突变的新型达尔文进化理论模型显然代表比沙堆模型复杂得多的系统。它的复杂表现在微扰不但引起非常不同的瞬态过程,而且导致不同的稳定终态(演化结果)。用生态网络演化作为例子,如果倒退许多年,把地球上的进化再来一次,那么今天地球上的生物圈子一定非常不同。

我们将在1.6节再回到临界现象的讨论,并且把它和复杂性的讨论结合起来。

1.6 混 沌

我们首先要回到1.1节中介绍的牛顿、拉格朗日、哈密顿等的经典力学。一个力学系统的演化(动力学)经常用一组微分方程描述。本书的读者们熟悉的线性微分方程原则上总可以解析求解,但是它们只能演示确定、规则、可预言的演化。数学家和物理学家们逐渐认识到,在描述接近实际系统的微分方程中,非线性微分方程要比线性微分方程多得多(线性微分方程好像微分方程大海中的一滴水)。数学家们已经致力于非线性微分方程的求解几百年,但是找到的、能够解析的非线性微分方程相对不可解析的极其稀少。30年之前,许多数学家和物理学家相信所有的非线性微分方程一定可以解析求解,只是还没有发现相应的技巧。总有一天,任何非线性微分方程的不确定、不规则、不可预言的演化可能性都不会存在。然而,也有极少数数学家通过研究发表了非常大胆的相反看法。法国伟大的数学家庞加莱(图1.26)就是他们的代表。

庞加莱1881年起担任巴黎大学教授直到去世。1887年当选为法国科学院院士,1908年当选为法兰西学院院士。他的研究涉及数论、代数学、几何学、拓扑学等许多领域。19世纪末,庞加莱为了研究小行星轨道的稳定性问题,创立了非线性微分方程的定性理论,并且发现:复杂到三体的引力相互作用就可能导致微分方程动力学描述的本质性改变,也就是在系统的相空间(广义坐标-广义

动量构成的空间)中的某些特定位置产生“描述本质不同运动的图形”“无限复杂地犬牙交错”的精细结构。这些结构足以使无限小的扰动产生运动结果的根本差别,从而使运动实际上不可预言。很可惜庞加莱的这些天才思想没有在数学界引起足够的重视,而几乎所有的物理学家都不知道或者不懂得他的研究。否则关于混沌运动的知识可能要提前一百年为人所知。庞加莱的发现告诉我们,牛顿的经典力学法则中本来就包含了不确定、不规则、不可预言的演化可能性,本来就需要玻耳兹曼为之奋争的概率和统计描述。



图 1.26 庞加莱(1854—1912)

另一个应该提到的人物是 1917 年出生于美国康涅狄格州的洛伦茨(图 1.27)。他在 20 世纪 50 年代末到 60 年代初研究长期天气预报理论。在大大简化了描述大气运动变化的模型之后,他得到了只有 3 个变量的一阶常微分方程组,并且数值地发现:由此方程组描述的运动中存在一个“奇异吸引子”,即此后大家所说的洛伦茨吸引子。所谓吸引子就是一个相空间区域内所有初值出发轨道的归宿,在洛伦茨之前,大家以为所有的吸引子都在相空间表示为处处光滑、具有某种规则的图形,具体说都是某个“环面”上的封闭或不封闭的“环”。然而如图 1.28 所示的洛伦茨吸引子却被显示为永不封闭的、两个螺旋线之间的随机跳跃。这是一个分形,也就是奇异之所在。它描述的是一个不确定、不规则、不可预言的演化。如果方程描述天气的变化,那么“巴西蝴蝶扇动翅膀就可能在美国引起得克萨斯的飓风”[26]。

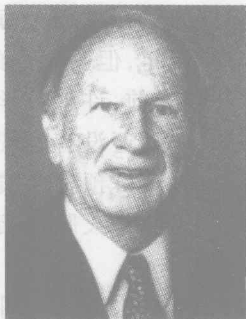


图 1.27 洛伦茨(1917—2008)

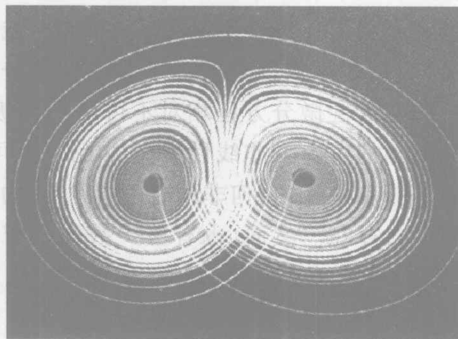


图 1.28 洛伦茨吸引子(引自文献[26])

1936 年出生于澳大利亚悉尼的罗伯特·梅(May)(图 1.29)是我们要提到的第三个人。他在 1975 年担任美国普林斯顿大学教授,主要研究生态科学。在

1976 年 Nature 的著名文章“Simple mathematical models with very complicated dynamics”中，梅报道了他对著名的描述生物种群个体数目世代更替规律的逻辑斯谛模型（表示为 $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$）的数值研究。他发现在增大模型的非线性（也是远离平衡程度）参数时，种群个体数目从保持不变逐渐发展到周期性地大小更替，好像大家熟知的果树或者病虫害的“大小年”一样。这种更替周期随着参数 μ 的变大不断倍增，而且倍增不断加速，很快就达到无穷周期，此后种群个体数目也呈现不确定、不规则、不可预言的演化（如图 1.30 所示）。

与前几节介绍的物理学成就不同，在混沌学的建立和发展中需要提到的人非常多。这可能是现代科学发展的特征。很难再由一个人包揽一个新学科的全部发现了。在本书的篇幅限制下，我们只能再介绍一个人。



图 1.29　罗伯特·梅（1936 至今）

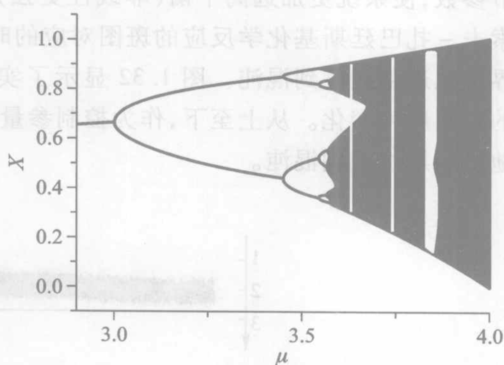


图 1.30　生物种群个体数目世代更替规律的逻辑斯谛模型数值研究（引自文献[27]）

现任美国洛克费勒大学教授的费根鲍姆（图 1.31）1944 年出生于美国的费拉道菲亚。他 16 岁进入纽约市立学院学习电机工程，但是在本科毕业后，他在 MIT 只读了一年电机工程的研究生就决定改读理论物理学方向。在博士毕业并短期工作了两年之后，他在美国洛斯·阿拉莫斯国立实验室理论部找到了比较长期的工作，并且接受了使用理论物理学的方法研究湍流的任务。上面介绍的梅的研究给了他很大的启发。由于他在理论物理学领域的扎实基础，他很快地意识到梅发现的从周期运动向所谓的“混沌运动”的过渡正是一种临界现象，而且解析推导出了这种临界现象的序参量普适规律和普适标度常数。这些发现掀起了从 20 世纪 70 年代末到 90 年代中席卷几乎所有科学界的混沌研究

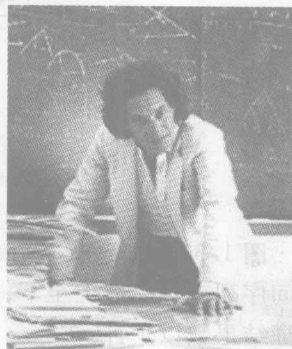


图 1.31　费根鲍姆（1944 至今）

热潮。费根鲍姆因此获得知名度仅次于诺贝尔奖的沃尔夫奖。

梅和费根鲍姆发现的是第一条作为临界现象的从规则向混沌过渡的道路。此后很快地发现了第二、第三条道路，其中第二条又分为六个型[27]。大家越来越深刻地认识到，混沌就是确定性方程产生的、由于对初值或扰动无限敏感而表现出的貌似随机的运动。这种运动体现了确定性与随机性矛盾又统一的关系，是一种更高级（也就是更复杂）的随机状态。

在认识到这些之后，1.4 节所介绍的贝纳尔对流和贝鲁索夫 - 扎巴廷斯基化学反应的研究者们立即做出了反应。他们意识到，如果在远离平衡、开放的条件下，在这些系统从平衡、均匀的随机状态自发地涌现的有序时空运动斑图中任意选择一个点来追踪，就可以用一个时间周期运动来集中地描绘这些斑图。当调节参数，使系统更加远离平衡（非线性更强），不管是贝纳尔对流斑图，还是贝鲁索夫 - 扎巴廷斯基化学反应的斑图对应的时间周期运动都会按照上述的三条临界现象道路过渡到混沌。图 1.32 显示了实验得到的贝纳尔对流从周期到混沌的时间序列变化。从上至下，作为控制参量的雷诺数逐渐增大，系统行为也相应地从周期过渡到混沌。

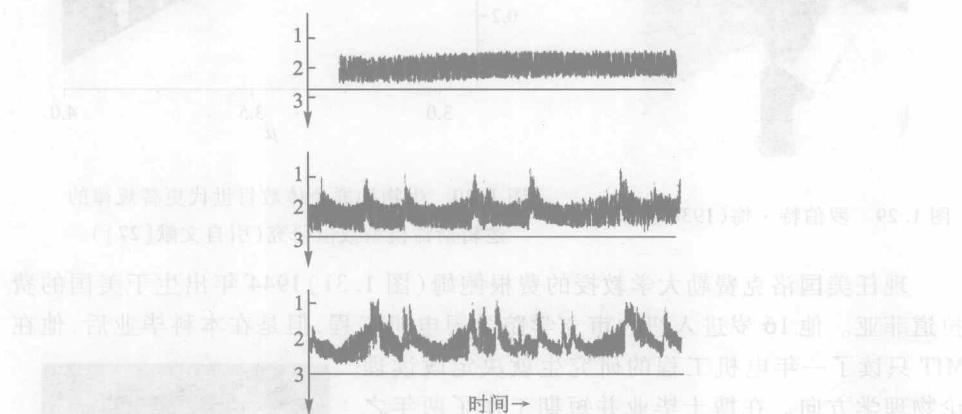


图 1.32 实验得到的贝纳尔对流从周期到混沌的时间序列变化（引自文献[27]）
图中纵坐标为流体的垂直速度分量，横坐标为时间。从上至下，作为控制参量的雷诺数逐渐增大

图 1.33 显示了一个在约瑟夫森结震荡电路中实验得到的从周期到混沌的时间序列变化。从上至下，作为控制参量的结两端电压逐渐增大。类似的实验验证结果数以千计。

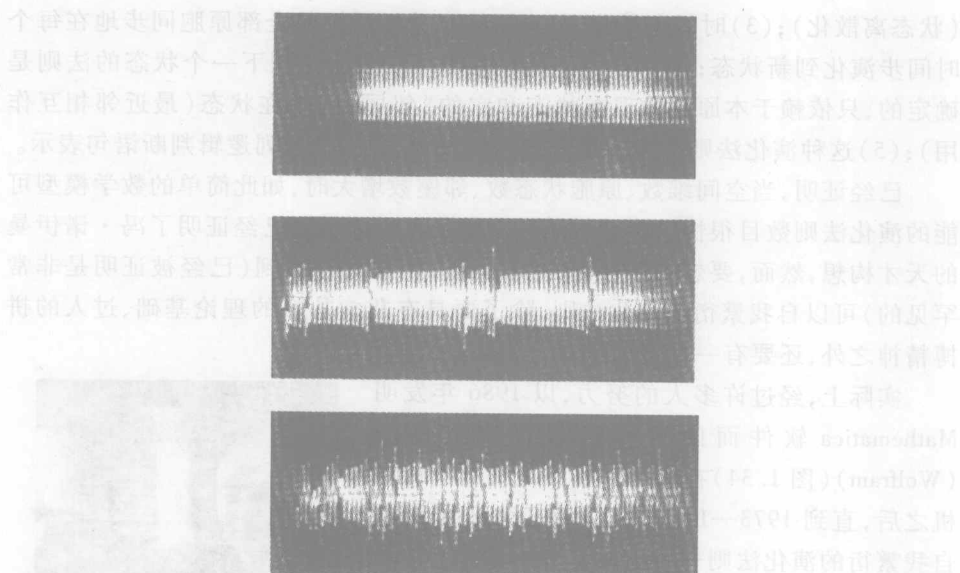


图 1.33 一个在约瑟夫森结震荡电路中实验得到的从周期到混沌的时间序列变化(引自文献[27])

1.7 原胞自动机

1.6 节所介绍的,从一些低维迭代方程或者微分方程所表述的动力学模型中得到的混沌运动图像,距离我们周围千千万万的真正复杂运动还很远。我们熟悉的种种复杂运动,尤其是具有生命特征系统的复杂运动,比混沌复杂得多。有没有可能创造一种新的数学描述工具,使它能够数学地、定量地刻画具有真正复杂运动基本特征的运动模式?

实际上,远在1.3 节介绍的算法复杂性提出之前,计算机学家冯·诺伊曼在20 世纪 40 年代致力于研究现代计算机的理论的时候,就提出了这种数学描述工具及其相应的复杂演化理论的天才设想。

与倡导算法复杂性的几位科学家的思路不同,冯·诺伊曼完全不打算用“计算机复制对各个实际系统观测结果的数据序列的难易程度”来度量这些系统如何复杂,他单刀直入地认为:真正的复杂系统模型就应该能够再现现有生命系统的最基本特征:自我繁衍和进化,而且一种类似于计算机的数学模型就能够达到这种要求。这种模型被他命名为“原胞自动机”。冯·诺伊曼从理论上证明了至少有一种原胞自动机可以自我繁衍。

什么是原胞自动机?它的要点是:(1)空间 1 ~3 维的规则格子(空间离散化,而且是低维的);(2)每个时刻每个格点(原胞)可采取有限个分立状态之一

(状态离散化);(3)时间离散化,整个原胞自动机系统的全部原胞同步地在每个时间步演化到新状态;(4)每个原胞由现在的状态演化到下一个状态的法则是确定的,只依赖于本原胞的现在状态和它的“邻居”的现在状态(最近邻相互作用);(5)这种演化法则常常不用解析函数表示,而用一系列逻辑判断语句表示。

已经证明,当空间维数、原胞状态数、邻座数增大时,如此简单的数学模型可能的演化法则数目很快就会增加到天文数字。虽然历史已经证明了冯·诺伊曼的天才构想,然而,要想在这样浩如烟海的演化法则中找到(已经被证明是非常罕见的)可以自我繁衍的演化法则,除了要具有非常扎实的理论基础、过人的拼搏精神之外,还要有一点运气。

实际上,经过许多人的努力,以1986年发明Mathematica软件而闻名于世的沃尔夫莱姆(Wolfram)(图1.34)在使用了足够现代化的计算机之后,直到1973—1981年,才终于发现了能够自我繁衍的演化法则——生命游戏。它的动力学法则是:在类似围棋的二维方格子上,每个格点具有两个状态:“生”(用1表示)或者“死”(用0表示)。下一个时刻的状态决定于格点自身和它的八个邻座的现在状态。如只有1个以下的“活邻座”(太孤单),或有四个以上的“活邻座”(太拥挤),则格点死亡(1变为0);如有三个“活邻座”,则死格点“重生”(0变为1);如有两个“活邻座”,则格点状态不变[28]。

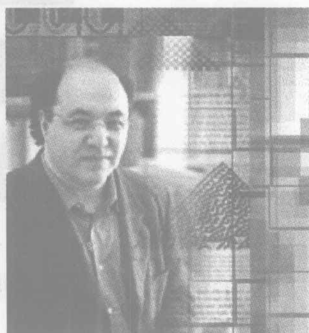


图1.34 沃尔夫莱姆(1959至今)

图1.35显示了一种被称为“食肉者”的生命游戏演化过程。在 $t=0$ 时刻用白色圆点表示的食肉者经过四步演化,吃掉了在 $t=0$ 时刻用黑色圆点表示的小虫子,在 $t=4$ 时刻消化完毕(圆点都表示1,空格子都表示0)。

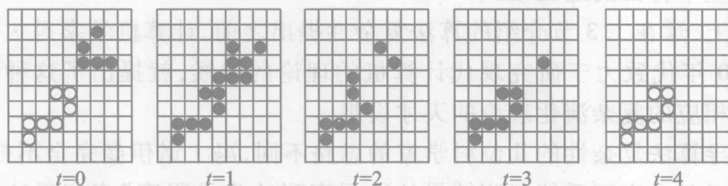


图1.35 “食肉者”的生命游戏演化过程(引自文献[28])

在进行了极其大量的计算之后,沃尔夫莱姆发现了具有生命特征的原胞自动机复杂演化状态,并且总结了原胞自动机系统中四类不同性质的演化[28]。它们是:(1)稳定态:即原胞自动机自动演化到一个永远不再变化的稳定构型;(2)周期态:即原胞自动机自动演化到一个永远在有限个构型之间按照严格法则交替的状态;(3)混沌态:即原胞自动机自动演化到一个永远不重复,而且对初值

变化以及扰动无限敏感的、貌似随机的演化状态;(4)复杂态:即原胞自动机永不停止地呈现看来似乎是以上三种演化状态的随机交替。复杂态常常显示一定时间、空间范围内看来非常有序的构型,但是这些构型又随时可能被别的看来有序或者无序的构型打断。这是人类第一次创造了一种数学描述工具,使它能够数学地、科学地、定量地刻画具有真正复杂运动基本特征的运动模式。

这种对复杂状态基本特征的描述使我们想到任何一个比较繁华城市的街道。那里充满了各式各样的商店、餐馆以及其他各类机构。每一个机构的时空运转似乎都是有序的,但又绝不是完全、理想的有序,其中充满了各种层次、各种形态的无序行为。每一个机构会显示长短差别非常大的寿命,而在它关张之后,另一个新机构不久就会代替它在原来的地方开张,又呈现完全不同的类似有序的时空结构。如此的演化似乎永无休止。

图 1.36 显示了 3 种演化的例子。为了能够在一个平面图中显示演化,图形使用一维原胞自动机。每条水平线表示一维原胞自动机的许多一维格点。其中黑点表示状态 1(生),白点表示状态 2(死)。这样,每条竖直线就表示了一个格点的两状态演化。图 1.37 显示二维原胞自动机 2 周期演化的 3 个例子。

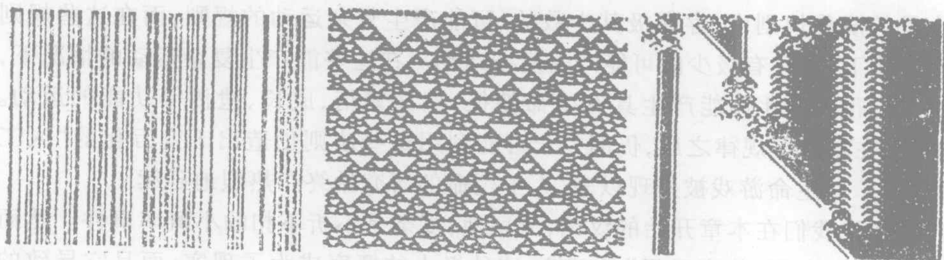


图 1.36 自左至右:稳定态、混沌态、复杂态(引自文献[28])

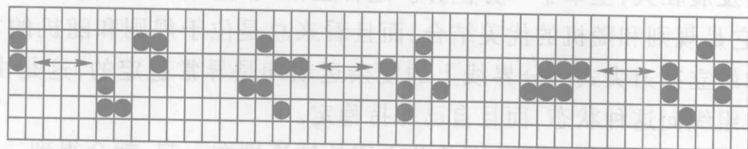


图 1.37 二维原胞自动机 2 周期演化的 3 个例子(引自文献[28])

沃尔夫莱姆在进行了极其大量的计算之后,还总结了原胞自动机系统中四类不同性质演化的比例。结果可以用表 1.1 描述[28]。其中 k 表示每个原胞的可能状态数,r 表示“邻座半径”。例如在一维原胞自动机中 $r=1$ 表示每个原胞取左右各一个邻座;$r=2$ 表示每个原胞取左右各两个邻座;在二维原胞自动机中 $r=1$ 表示每个原胞取上下左右各一个(共四个)邻座;$r=2$ 表示每个原胞取上下左右各两个(共八个)邻座。表中的数字表示沃尔夫莱姆在二维原胞自动机中总结出的四类不同性质演化的比例。可以看到,当系统简单到一定程度(k,r 小

到一定程度)之下,复杂态将不会出现,而且混沌态的比例也最小。当系统的复杂程度(k,r)增加时,复杂态和混沌态的比例都会增加,但是复杂态的比例始终很小,而且复杂态总是出现在规则态与混沌态的“边缘”。

表 1.1 原胞自动机系统中四类不同性质演化的比例(引自文献[28])

运动类型	$k=2,\ r=1$	$k=2,\ r=2$	$k=2,\ r=3$	$k=3,\ r=1$
1	0.50	0.25	0.09	0.12
2	0.25	0.16	0.11	0.19
3	0.25	0.53	0.73	0.60
4	0.00	0.06	0.06	0.07

限于篇幅,不可能介绍对演化规则的分类,以及对各类演化规则数目的解析分析结果。大致说来,在某种规定下,一维原胞自动机的演化规则总数是 $k^{k^{2r+1}}$ 个;二维原胞自动机两个可能状态、四邻座的演化规则总数是 4×10^{9} 个;二维原胞自动机两个可能状态、八邻座的演化规则总数是 10^{154} 个[28]。

这样,我们有了一个用非常简单的数学模型描述的系统演化图像。在非常大量的演化规则中,存在极其少数的、可能产生复杂运动的规则;而在这些规则的作用下,也只有极少的可能产生复杂运动。在这些能产生复杂运动的情况下,又只有很少的比例能产生具有生命特征,例如繁衍、成长、遗传等功能的运动。然而,在掌握了规律之后,仍旧完全可能利用这些法则创造出千变万化的“人工生命”。从生命游戏被发现以来,人工生命的研究始终在热烈地延续。

回忆我们在本章开始的议论,无疑地,复杂是不折不扣的小概率事件。然而在现实中,有了“物竞天择”的环境,这种极小的概率成为了现实,而且它导致的结果不断发展壮大,主宰了一方世界。这种生命式的复杂既不是随机的,也不是规则的,它是规则和随机的优美结合,而且看来总是位于规则和随机的“边缘”。这种好像站立在刀尖式的分界线上的复杂运动却是异常稳定的,这是由于复杂系统会自组织向这种状态,而且自己保持稳定。

如果有些牵强附会地把前面几节介绍的结论堆在一起,就会得到:一个远离平衡、开放、非线性并且足够复杂的系统会演示有序、规则运动向无限敏感地依赖扰动、貌似随机的混沌运动的过渡。这是一种临界现象。复杂性的极大值就在这个过渡的临界位置,而且可以期望这种系统会自组织向这个稳定的临界状态。系统在这种稳定临界状态演示的就是具有真正复杂运动基本特征的运动模式。如果我们真的具有这样同时包容前面所述的所有物理、数学理论的科学和定量的新理论框架,那么描述包括生命系统进化这样的复杂行为也就并不困难。这样看来,我们距离物理学扩展到复杂世界似乎已经不远了,然而实际不然。我们将在本书后面几个部分继续进行讨论。

1.8 描述复杂性与统计复杂性

如果我们真的具有同时包容前面所述所有物理、数学理论的科学和定量的新理论框架，那么再回到1.3节讨论的话题，也就是给出复杂性和复杂系统的定义，就应该毫不困难。对于已经完全理解、可以驾驭的一类系统，写出一个好的定义只需要一些文字和数学能力。可惜的是这样的理论框架和完全理解不但还没有，而且看来还离我们比较遥远。这本书所能介绍的，只可能是我们比较感兴趣的，向这个方向的一些努力成果。

这样看来，似乎没有必要再介绍从20世纪60年代以来人们关于定义复杂性和复杂系统的研究成果了，这是因为在缺乏对复杂系统的基本理解的情况下，做出一个好的定义至少是非常困难的，因此也不奇怪为什么所有已经提出来的定义都没有得到公认。然而不然，这一段时间中，对于复杂性和复杂系统的定义的研究中不乏相当优秀、深刻的思想和建议。它们在复杂性科学的研究历史中起到一定的作用，占有一定的地位。所以，本节仍旧用一节篇幅做十分简单的介绍。要说明的是，关于复杂性和复杂系统的定义相当多，也很难有一个公认的评判它们高下的标准。我们选取的几种可能仅反映我们自己的观点。

1.8.1 语法复杂性

值得骄傲的是我们第一个要介绍的复杂性定义与两个中国人的名字相联系。这种复杂性被称为语法复杂性，是所谓的"描述复杂性"中最重要的一种。描述复杂性的定义者们倡导利用"对一个系统进行描述的困难程度"来度量系统的复杂程度。他们认为对任何一个系统的认识都只能来源于对它的观测，因此某种观测结果就可以用来代表这个系统，而且总可以期望对这种观测结果做出统一的不依赖具体细节的描述，因此就可以用这种描述的难易差别来标志系统复杂性的差别。1.3节介绍的算法复杂性就是一种最早的描述复杂性。定义者们认为系统可以用标志观测结果的数字序列来表示，在一类理想标准化的计算机上完全再现这个数字序列的程序最小长度就可以定义为系统的复杂性。

与此不同，中国科学院理论物理研究所、复旦大学理论生命科学研究中心的郝柏林院士（图1.38）和苏州大学的谢惠民教授（图1.39）长期合作研究的语法复杂性认为普遍的系统都可以用符号序列（数字序列只是符号序列的一个特例）来描述。这种符号序列来源于人们对系统进行"粗粒化描述"（也就是抓住系统在某一个层次上的根本特征，舍去更小层次上的细节，所进行的概括描述）的需要，例如用u,d,c,s,b,t六个符号代表夸克；用元素符号代表元素，来写出分子式和反应方程式等[13]。



图 1.38 郝柏林院士(1934 至今)



图 1.39 谢惠民教授(1939 至今)

人类对客观世界的认识以概括(归纳)能力为主要基础。例如对一类动物或者一类现象的认识等。符号序列描述可能反映了人类的最高归纳能力。也许所有的科学学科在发展到一定程度时都会使用符号序列描述。对这些符号序列的复杂性的研究在20世纪50年代就引起大家注意,而且取得了一些数学上严格的重要成果。用郝柏林院士的话来说:"符号序列可以自然地纳入'形式语言'的框架","形式语言可按语法复杂性的阶梯分类"[13]。比较通俗地说,形式语言就是按照一定(严格的)法则(生成语法)排列的符号序列。20世纪50年代已经有人对比较简单的形式语言(串行生成语言)进行了"完全的分类"[29,30](按照复杂性递增的顺序,分为所谓的正规语言、上下文无关语言、上下文有关语言、递归可数语言,对于这些概念有兴趣的读者可以参看文献[29,30])。这就是"形式语言的语法复杂性分类阶梯"。由此可以对这一类符号序列的复杂程度做出刻画。更复杂的形式语言分类也一直有人研究,但是还没有得到如此严格、完整的结论。

郝柏林院士和谢惠民教授的主要研究成就是关于"混沌系统运动轨道'符号动力学'描述的语法复杂性"[29,30]。所谓符号动力学就是用少数符号概括地描述混沌系统的各种运动轨道[31,32]。郝柏林院士和谢惠民教授近年来转向生命系统一些性质的符号序列描述及其复杂性的研究[33],这显然是具有更重要意义的课题。

国外也有一些人研究语法复杂性。值得提到的一个人是格拉斯伯格(P. Grassberger)[34]。他的基本思想与上面所述的有比较大的差别。他认为对一个实际系统进行的观测通常得到一个斑图。他与郝柏林院士和谢惠民教授思想的共同点是对斑图的描述通常也会转换为一个符号序列。这个符号序列也可以归纳为一种形式语言。不同的是,格拉斯伯格提出了一种在这个符号序列中知道某一个字符串之后,确定下一个符号所需的最小平均香农信息量的方法,并且把

这个最小平均香农信息量(即为了做出最佳预言,而必须存储于序列中最小总信息量,可以看作描述此斑图性质所需的最小平均香农信息)定义为这种形式语言的复杂性。

作为这种定义计算的例子,格拉斯伯格首先计算了1.6节介绍过的“梅的逻辑斯谛模型”不同运动状态的这种复杂性。数值计算的结果表明:完全规则(周期)态的这种复杂性是最小的,“完全发展混沌”的这种复杂性也比较小。只有趋近于周期向混沌态过渡时的临界点时,这种复杂性才最大。其次,格拉斯伯格数值计算了1.7节介绍的沃尔夫莱姆生命游戏原胞自动机模型所演示的四种基本状态的这种复杂性,结果表明“复杂态”的复杂性最大。这两个例子都说明“复杂诞生于产生混沌的边缘”。

1.8.2 热力学深度

有些人对“描述复杂性”的基本思想表示不赞同。洛德(S. Lloyd)和佩格斯(H. Pagels)可能是具有这样思想的学者的代表。他们在1988年提出[35]:复杂性定义的“原则”(或“公理”)应该包括:(1)一个物理系统的复杂性定义应该是系统本身物理性质的函数,不依赖于诸如计算机模拟那样的描述手段。(2)按照20世纪60年代以来得到的一系列物理学成就,此定义应该赋予“完全无序”及“完全规则”状态以“低复杂性数值”。而“高复杂性数值”应该在此两种状态之间。(3)此定义应该标志系统演化到所描述状态的过程的复杂程度(或者说达到此状态的困难程度)。同时,他们提出一个可以被实验证实的、系统宏观状态的复杂性定义的“数学要求”是:(1)它应该是“实验可观测的、向此态演化的轨道”出现概率的连续函数(演化到此态的可能性越小,此态越复杂)。(2)在各个轨道出现等概率的情况下(出现概率均为$1/n$),则复杂性的量度应该是n的某个单调增函数。也就是说,可能的轨道越多,确定一条轨道需要的信息越大,复杂性也就越大。(3)复杂性量度应该满足“可加性”。

洛德和佩格斯严格地证明了:满足上述判据和数学要求的复杂性量度正比于“可以实验确定的、导向此态的轨道集合的香农信息”。他们把这样的复杂性定义称为“热力学深度”,定义为:$\vartheta(d) = -k\ln P_i$,其中P_i表示系统经由i轨道到达d态的概率,k表示任意一个正常数,$\vartheta(d)$就表示系统经由一系列轨道到达d态的“所需总信息量”。作为一个例子,洛德和佩格斯严格地证明了:哈密顿系统的热力学深度就是系统状态的热力学熵(即克劳修斯熵)和“相空间中导致此状态的轨道中相点占据体积与玻耳兹曼常量的乘积”之差。这个定义满足上述的“原则”和“数学要求”。同时,洛德和佩格斯严格地证明了:热力学平衡态和纯物质完美晶格的热力学深度为零。而且,热力学深度不因为复杂系统或其子系统的“复制”而增加,也就是说,再多的简单系统的简单集合仍旧是简单的。

1.8.3 复杂性的统计度量

与1.8.2节所介绍的热力学深度大致同时或更晚,有相当多的基于热力学、统计物理学理解的或者应用、改造或组合热力学、统计物理学的某些物理量而得到的复杂性定义问世。这些定义都受到了一定的注意。然而,其中相当一部分十分难懂,也难于计算,不适合于我们这样的使用几页篇幅所作的简单介绍。在20世纪90年代中期,有些人主张:从大致相同于1.8.2节所介绍的洛德和佩格斯提出的复杂性定义的“原则”或“公理”[35]出发,但是借用一些已经公认的物理理解,采取最简单直接的思想和表述来得到合理的统计复杂性。其中,劳普兹-瑞兹(R. L-Ruiz)等人提出的“复杂性的统计度量”[36]曾经引起过有趣的争论,给后面的研究者提出过有用的启发,又非常简单易懂,值得在本小节中简单介绍。

复杂性的统计度量的定义可以写作 $C_{\mathrm{LMC}}=HD$,其中 $H=-k'\ln p$,表示1.2节介绍过的,系统状态的香农信息。这一项表示系统包含的无序性对复杂性的贡献。系统越无序(可能的演化越多),香农信息越大,C_{LMC} 也就越大。对具有 N 个可能状态 $\{x_1,x_2,\cdots,x_N\}$ 的系统,若其中每个 x_i 状态出现的概率为 p_i,容易根据大学统计物理学课程的知识写出更普遍的表示式:$H=-k'\sum_{i=1}^{N}p_i\ln p_i$。定义中的第二项 $D=\sum_{i=1}^{N}(p_i-1/N)^2$,表示“远离平衡的程度”。这是由于 $1/N$ 表示“每个状态等概率地出现”这种极端情况下的各态出现概率,也就是大家熟悉的平衡态理想气体的每个状态出现概率。因此,对于平衡态理想气体这种典型的、熵和信息熵都达到最大(也就是 H 最大)的、理想的平衡随机运动状态,D 等于0,最小。系统越远离平衡,D 越大。最不平衡的情况可能是完美晶格这样的理想规则的系统,这时只可能出现唯一的一个状态,其他状态的出现概率都为零。即 $p_1=1, p_i=0\ (i=2,\cdots,N,\ N\to\infty)$,这时 $D=D_{\max}=1$。由此可以期望 H 和 D 的乘积构成的复杂性的统计度量可以在完全规则与完全随机之间显示一个极大值,如图1.40所示。图中的坐标横轴表示从完全规则(完美晶格)到完全随机(平衡态理想气体)的逐渐过渡;纵轴分别对三条曲线表示 H,D 和复杂性的统计度量的变化。从完全规则到完全随机逐渐过渡时,H 单调地增加,D 单调地减小,而它们相乘得到的复杂性的统计度量在中间显示一个极大值。

作为例子,劳普兹-瑞兹等人数值地计算了1.6节介绍过的“梅的逻辑斯谛模型”不同运动状态的复杂性统计度量。数值计算的结果表明:趋近于周期向混沌态过渡的临界点时,复杂性统计度量最大,如图1.41所示。

劳普兹-瑞兹等人也数值地计算了一个能够在一定程度再现1.6节介绍过

们之间的转变,相应的复杂性统计度量不为零,且显示依赖于α值的复杂变化;在α→2时,洛伦茨映象显示一个随机运动,相应的复杂性统计度量也趋于零。

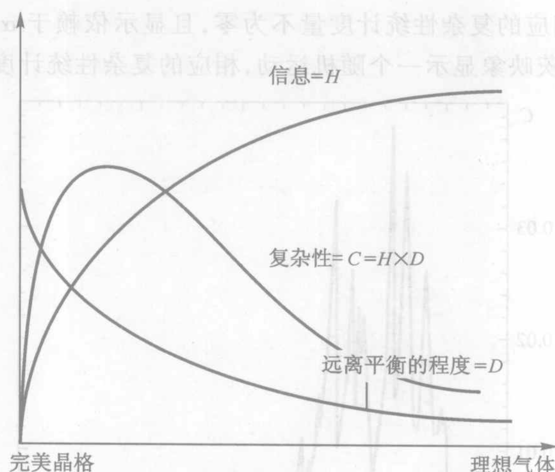


图1.40 显示 H,D 和复杂性的统计度量变化的草图(引自文献[36])

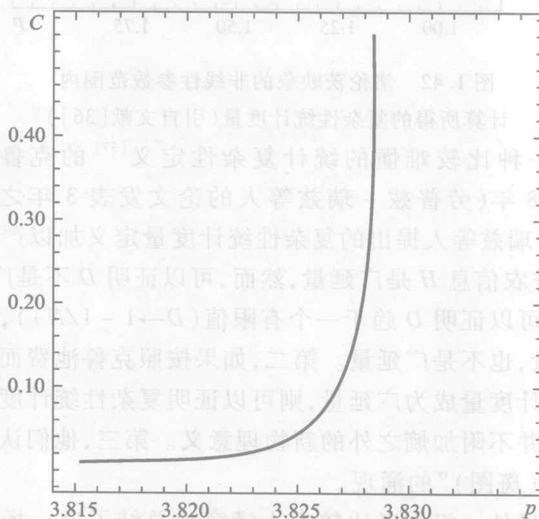


图1.41 逻辑斯谛模型中从规则运动向混沌运动转变的临界点(模型的非线性参数取值为3.8284)附近计算所得的复杂性统计度量(引自文献[36])

的"洛伦茨吸引子"的所谓"洛伦茨映象"不同运动状态的复杂性统计度量,如图1.42所示。洛伦茨映象的表示式为:$x_{n+1}=\alpha x_n$,若 $x_n<0.5$;$x_{n+1}=\alpha(x_n-1)$,若 $x_n>0.5$,其中 $\alpha\in(0,2)$。这比1.6节介绍过的"洛伦茨方程"远为简单。图1.42显示在 $\alpha\in(0,1)$ 范围内,洛伦茨映象显示一个稳定周期轨道,相应的复杂性统计度量为零;在 $\alpha\in(1,2)$ 范围内,洛伦茨映象显示许多个混沌轨道,以及它

们之间的转变，相应的复杂性统计度量不为零，且显示依赖于 α 值的复杂变化；在 $\alpha \to 2$ 时，洛伦茨映象显示一个随机运动，相应的复杂性统计度量也趋于零。

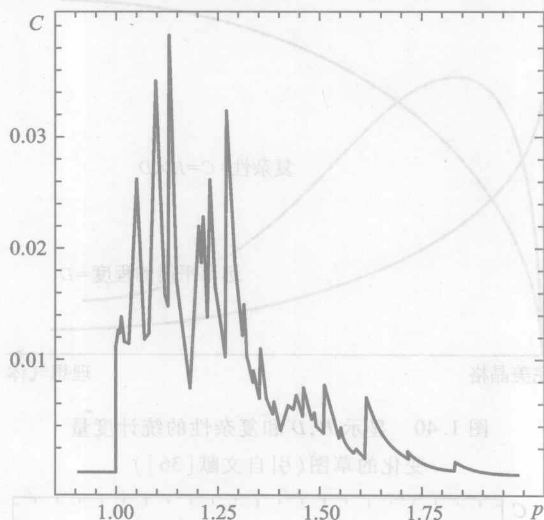


图 1.42 洛伦茨映象的非线性参数范围内计算所得的复杂性统计度量（引自文献[36]）

曾经提出过一种比较难懂的统计复杂性定义[37]的克鲁池费而德（J. P. Crutchfield）在 1998 年（劳普兹－瑞兹等人的论文发表 3 年之后）专门发表论文[38]，对劳普兹－瑞兹等人提出的复杂性统计度量定义加以严厉批评。他的主要责难是：第一，香农信息 H 是广延量，然而，可以证明 D 不是广延量（当系统大小趋于无穷大时，可以证明 D 趋于一个有限值（$D \to 1 - 1/N$）），因此复杂性统计度量既不是强度量，也不是广延量。第二，如果按照克鲁池费而德的想法修改 D 定义，使复杂性统计度量成为广延量，则可以证明复杂性统计度量成为熵密度的简单函数，也就是并不附加熵之外的新物理意义。第三，他们认为复杂性统计度量不能说明"结构（斑图）"的涌现。

一年之后，有另外一组作者比较令人满意地总结了这一场争论。我们将在 1.8.4 节中予以介绍。

1.8.4 复杂性的简单度量

希呐尔、戴菲森和兰兹伯格（J. S. Shiner, M. Davison 和 P. T. Landsberg）在 1999 年发表论文[39]，对 1.8.3 节介绍的关于复杂性统计度量的争论做了一个比较令人信服的评论，而且由此提出了更好的"复杂性的简单度量"。他们的主要思想是：(1) 维持复杂性统计度量的概念易懂性和计算简洁性。(2) 克服复杂性统计度量的缺点，对它稍加改造，就可以使它变为强度量（他们认为复杂性

应该是强度量,即状态的函数;而不应该是广延量,不应该系统越大就越复杂)。(3)在改造之后,容易证明复杂性简单度量(或改造后的复杂性统计度量)不等同于熵密度或者其他标志无序性的物理量。

复杂性简单度量的定义为:$\Gamma_{\alpha\beta}=\Delta^{\alpha}\Omega^{\beta}$,前一项的定义为:$\Delta=S/S_{\max}$,其中 S 表示香农信息,如 1.8.3 节所述,表示无序程度对复杂性的贡献。Δ 就是归一化的香农信息。一般情况下 S 写为:$S=-k\sum_{i=1}^{N}p_i\ln p_i$($k$ 是玻耳兹曼常量),$1\leqslant i\leqslant N$(见 1.8.3 节的说明)。在各个状态等概率出现时,香农信息达到它的最大值:$S_{\max}=k\ln N$,此时 $p_i=1/N$。后一项的定义为:$\Omega=1-\Delta$,表示有序程度对复杂性的贡献。与 1.8.3 节的分析类似,例如在完美晶格中,类似地有:$p_1=1$,$p_{i\neq 1}=0$,$\Omega=1$ 取最大值;而在平衡理想气体的情况,$p_i=1/N$,$S=S_{\max}$,$\Delta=1$,$\Omega=1-\Delta=0$,取最小值。复杂性简单度量写为:$\Gamma_{\alpha\beta}=\Delta^{\alpha}\Omega^{\beta}=\Delta^{\alpha}(1-\Delta)^{\beta}=\Omega^{\beta}(1-\Omega)^{\alpha}$。当 $\alpha=\beta=1$,称为"最简复杂性",记为:Γ_{11}。显然,Δ,Ω 都是强度量,因此复杂性简单度量也是强度量。

如果定义式中 α 和 β 都是正实常数,容易得到复杂性简单度量的极大值位于:$\Delta=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$,$\Omega=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$。这时 $(\Gamma_{\alpha\beta})_{\max}=\dfrac{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}{(\alpha+\beta)^{(\alpha+\beta)}}$ $(\alpha>0,\beta>0)$,如图 1.43。这类似的说明复杂性的极大值位于随机与规则之间。

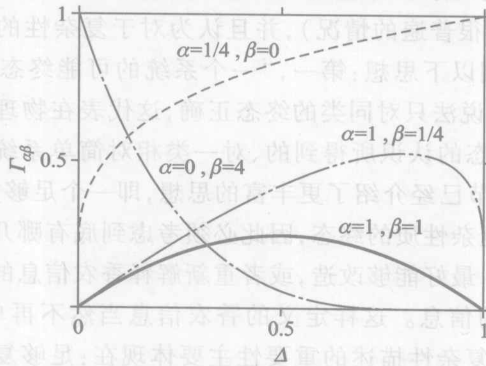


图 1.43 复杂性简单度量随 α 和 β 的变化

(引自文献[39])

类似地,希呐尔、戴菲森和兰兹伯格在文献[39]中数值地计算了 1.6 节介绍过的"梅的逻辑斯谛模型"(表示为:$x_{n+1}=rx_n(1-x_n)$)不同运动状态的复杂性简单度量。计算 S 的方法是把 x 轴分为 1024 道,对每个 γ 值轨道去掉 1 万次迭代瞬态,计算 10 万次迭代中每道出现的概率,然后运用 S 的定义式。图 1.44 显示了他们对逻辑斯谛模型数值计算得到的 Γ_{11} 随参数 r 的变化。结果显示:在图示的混沌区(含有无穷多周期窗口)内,每个 Γ_{11} 的峰值都对应周期窗口(规则

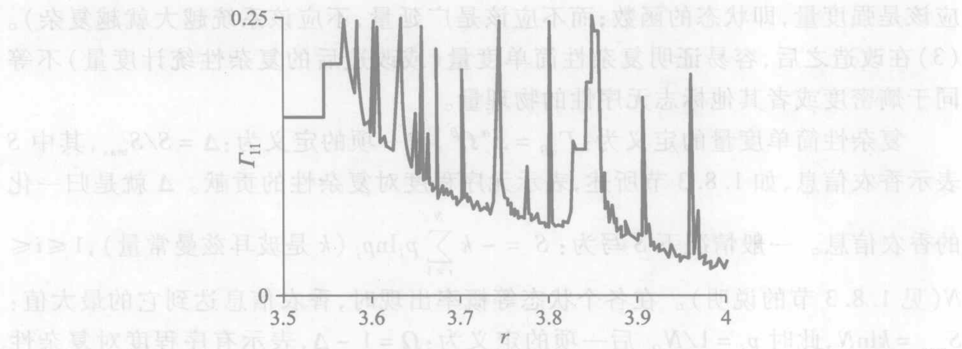


图 1.44　对逻辑斯谛模型数值计算得到的 Γ_{11} 随参数 r 的变化（引自文献[39]）

态）向混沌态转变的临界点。

1.8.5　复杂性的信息度量

扬州大学课题组最近[40]建议了一种被称为“复杂性信息度量”的复杂性定义。这也是一种统计复杂性。他们希望参照 1.8.3 节和 1.8.4 节所介绍的简洁思想，同时尽量使定义能多包容一些 1.4 节到 1.7 节所介绍的最近物理学进展。

他们假设所研究的系统都经过长短不同的“瞬态”演化到稳定或不稳定的“终态”（这显然代表很普遍的情况），并且认为对于复杂性的描述，瞬态与终态同等重要。他们强调以下思想：第一，“一个系统的可能终态越多（香农信息越大），无序性越大”的说法只对同类的终态正确，这代表在物理学发展早期，基于对平衡、均匀随机状态的认识所得到的、对一类相对简单系统的描述。然而，在本章前面，尤其 1.7 节已经介绍了更丰富的思想，即一个足够复杂的系统能够演示好几类具有不同复杂性质的终态，因此必须考虑到底有哪几类可能的终态，各自出现的概率如何。最好能够改造，或者重新解释香农信息的定义式，使之能描述不同复杂性终态的信息。这样定义的香农信息当然不再单调地依赖于无序性。第二，瞬态对于复杂性描述的重要性主要体现在：足够复杂的系统，由于受到扰动，可能趋向于不同的终态。最好也能够改造，或者重新解释香农信息的定义式，使之能描述不同复杂性瞬态的信息。这样定义的香农信息也不再单调地依赖于无序性。经过改造的香农瞬态信息与香农终态信息的结合很可能比较好地描述系统的复杂性。

到底如何重新定义香农瞬态信息与香农终态信息？又如何不太繁难地计算香农瞬态信息与香农终态信息？这很可能是比较困难的问题。由于对复杂系统的描述和分析，还缺乏（好像“适用于还原论的简单系统”所具有的那样）有效的理论和工具，即使有比较好的想法，恐怕也不可能给予严格证明。鉴于这种现

实,文献[40]建议了一种严格性不足的香农瞬态信息与香农终态信息的定义,以及相应的"估算"方法。这些定义也许值得大家进一步思考和讨论。

按照1.4节到1.7节所介绍的认识,系统的终态可能有下列六种:(1)稳定平衡态,其中所有描述运动的参量永远不变化;(2)稳定周期态,其中运动无限多次地重复;(3)稳定准周期态,其中运动不重复,但遵从简单的确定规律;(4)随机态,其中许多同类(一般是平衡态(稳定或不稳定),不能是混沌或者复杂态)状态各自以一定的概率出现;(5)混沌态,其中运动遵从确定的动力学规律,但是由于对初值选择和受到扰动无限敏感,看起来是随机的;(6)复杂态,其中上述五种运动中的一些状态一个一个随机地交替出现,永不停息。

文献[40]设想,最好能够找到一个方法,用其中一种比较简单的运动来统一地对以上所有六种(即使比较粗略地)进行描述。那样就可能按照香农信息的思想来计算任何这六种终态组合所包含的"统一运动状态数",从而描述不同复杂性终态的信息。他们建议,作为一次试探,用周期态作这种统一描述。他们并不想宣告:自己可以证明上述六种状态都可以用周期态"正交归一"地展开,只是期望,作为一种复杂性的估算方法,这种用周期态的统一描述所导致的系统的复杂性排序能够定性地符合真实的顺序(他们认为复杂性的绝对数值并不重要,也许根本不重要,重要的只是排序)。这种排序会不会改变真实的复杂性排序,也只能通过实验或者数值计算来检验。

在这样的估算中,第一,稳定平衡态可以被认为是周期态的一种特例(周期、振幅均为零)。第二,在一定条件(基本上要求描述系统运动的动力学方程处处可微)下,系统的准周期运动总可以用相空间中一个"环面"上的运动来描述,这时可以证明准周期运动对应一个无理"绕数",它可以用满足一定规律(此规律可以用一个连分式表示)的一个有理绕数序列来无限逼近。在任何规定的精度下,这个有理数绕数序列交替地给出一个比准周期运动无理绕数稍大的有理数绕数,和一个稍小的有理数绕数[41]。在此意义上,可以认为一个准周期运动可以用两个周期运动来近似地描述。因此在上述估算中,一个稳定准周期运动终态可以等价于两个周期运动终态。第三,一个随机运动状态通常指系统在许多同类可能状态间无规律地转换。假想其中一个将无限延续,就成为一个稳定平衡态。因此,在上述估算中,可以认为一个随机运动终态等价于这些平衡态(最简单周期运动终态)。第四,一个混沌运动状态可以被认为是在相空间中的一个"奇异集"上的运动,它的"骨架"可以表示为许多不稳定周期运动的集合。混沌运动常常逼近这些不稳定周期运动轨道中的一个,然后,由于这些不稳定周期运动是所谓的"排斥子",或快或慢地离开它[42]。这些不稳定周期轨道可以使用数值方法来辨认。当然,它们的数目决定于数值计算的精度,但是在通常条件下这个精度可以很高[43]。这样,在上述估算中,一个混沌运动终态可以等价于许多

个周期运动终态。最后,一个复杂终态应该认为是无限多个上述五种运动状态,也就是无限多个周期运动终态的集合。

这样,文献[40]建议定义“终态信息”为:$F = 1 - \left|\left(\sum_{i=1}^{N}\rho_i \ln\rho_i\right)/\ln N\right|$,其中$N$表示系统的、折算为周期终态数的可能“终态”数,$\rho_i$表示第$i$个周期终态出现的概率。这样,终态信息的大小不但决定于可能终态的多少,更重要的取决于可能终态的类型,也就是对应的周期终态的多少及概率分布。

在系统演化的瞬态中,状态参量的分布尚未达到稳恒,因此,要建议类似的“标准瞬态”度量和描述是困难的。文献[40]建议在一个瞬态给系统施加一个最小扰动。如果扰动后系统趋于稳定平衡态、稳定周期态或者稳定准周期态,最小扰动引起的系统反应也是小的,而且会随着时间增长而逐渐消失。系统始终趋向于同一个终态。他们定义这样的“扰动反应”个数为1,其大小为0。如果扰动后系统趋于不稳定平衡态(例如上述的随机态)、不稳定周期态(例如上述的混沌态)或者不稳定准周期态,最小扰动常常会使系统(以一定概率)经过与原来瞬态不同(经过的时间尺度和空间大小都不同)的另一个可能瞬态,趋向于与原来终态不同的另一个可能终态。他们定义这样的“扰动反应”个数为趋向于不同终态的瞬态个数,其大小为不同瞬态经过的、归一化的时间尺度或者空间大小。

文献[40]建议定义“瞬态信息”为:$T = -\sum_{j=1}^{L} P(s_j)\ln P(s_j)$,其中$L$是上述的“扰动反应”数目,$s_j$是第$j$个瞬态的“扰动反应大小”,$P(s_j)$是第$j$个扰动反应大小出现的概率。为了比较不同系统,$s$应该是量纲一的量。扬州大学课题组现在建议用一个系统最大的s值,$s_{\max}$,来对s归一化,即定义$s = s_{\mathrm{real}}/s_{\max}$,其中$s_{\mathrm{real}}$表示尚未归一化的、实际测量到的扰动反应大小。这个归一化的定义与文献[40]报道的不同,应该更为合理。这个改动影响到下文介绍的两个例子的计算结果,与文献[40]报道的结果有相当大差别,应该也更合理。这样,瞬态信息的大小不但决定于可能瞬态的多少,类似地更加取决于可能瞬态的类型。如前所述,系统越复杂,微扰的影响越大越丰富,瞬态信息也越大。

定义“复杂性信息度量”为:$C = TF$。他们期望这个定义能够具有一定特色。除了尽可能地考虑近年来物理学的新成就,从而有效地区分简单状态和复杂状态的性质之外,还希望这个定义能够在复杂系统和简单系统之间划分一个明确的界限。

对于前面几小节讨论过的一些极端情况。容易分析地得到复杂性信息度量的取值。例如:(1)当系统处于一个完全、均匀的热力学平衡随机终态时,可以设想系统有N个终态(不稳定平衡态),每个终态的概率均等,为$\rho_i = 1/N$,因此,

可以计算得到

$$F=1+\frac{\sum_{i=1}^{N}\rho_i\ln\rho_i}{\ln N}=1+\frac{\sum_{i=1}^{N}(1/N)\ln(1/N)}{\ln N}=1+\frac{-\ln N}{\ln N}=1-1=0。$$

结果是 $C=0$，与瞬态情况无关。(2)当系统处于一个完全规则终态(例如上述的稳定周期态或者完美晶体)，终态数 $N=1$，有

$$F=1+\lim_{N\to1}\frac{-\ln N}{\ln N}=1+\lim_{N\to1}\frac{-1/N}{1/N}=1-1=0。$$

类似地得到 $C=0$，也与瞬态情况无关。(3)终态数 $N=2$ 时，当系统趋向于一个稳定准周期终态，如上所述，可以认为存在两个出现概率相等的周期终态，计算得

$$F=1+\frac{(1/2)\ln(1/2)+(1/2)\ln(1/2)}{\ln2}=0。$$

类似地得到 $C=0$，同样与瞬态情况无关。(4)如果系统展示唯一的瞬态，例如前面介绍的扰动总是逐渐消失，对终态没有影响的情况，有

$$T=-\sum_{j=1}^{L}P(s_j)\ln P(s_j)=1\times\ln1=0,$$

则得到 $C=0$，与终态无关。(5)当系统趋向于一个上述的复杂态，可以认为系统展示无穷多个终态，即有 $N\to\infty$，由于并不是完全、均匀的热力学平衡随机终态，ρ_i 并不是常量，而是一个确定的分布，但是它总采取0～1间的有限数，则有

$$F=1+\frac{\sum_{i=1}^{N}\rho_i\ln\rho_i}{\ln N}=1+\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{N}\rho_i\ln\rho_i}{\ln N}=1,$$

即终态信息取可能的最大值。这时必须讨论系统瞬态的情况。如前所述，复杂运动状态对微扰的反应最丰富，“扰动反应”个数可能为 m 个(数目很大)。为了做一个简单的估计，假设每个扰动反应的出现概率均等，为 $P(s_j)=1/m$，则可计算得到

$$T=-\sum_{j=1}^{L}P(s_j)\ln P(s_j)=-\sum_{j=1}^{L}(1/m)\ln(1/m)=\ln m。$$

也就是说，一个复杂态可能显示很大的瞬态信息。这样，复杂态的复杂性信息度量可能也很大。

以上极端情况的分析很可能使人相信：众所周知的简单系统一般的具有为零的复杂性信息度量，只有复杂系统才具有大于零的复杂性信息度量。

扬州大学课题组数值地计算了1.6节介绍过的“梅的逻辑斯谛模型”(表示为 $x_{n+1}=\mu x_n(1-x_n)$)不同运动状态的复杂性信息度量。图1.45显示了他们对逻辑斯谛模型数值计算得到的 C 随参数 μ 的变化。结果显示混沌区具有大于零

的复杂性信息度量，而且每个复杂性信息度量峰值都对应周期窗口向混沌态转变的临界点。

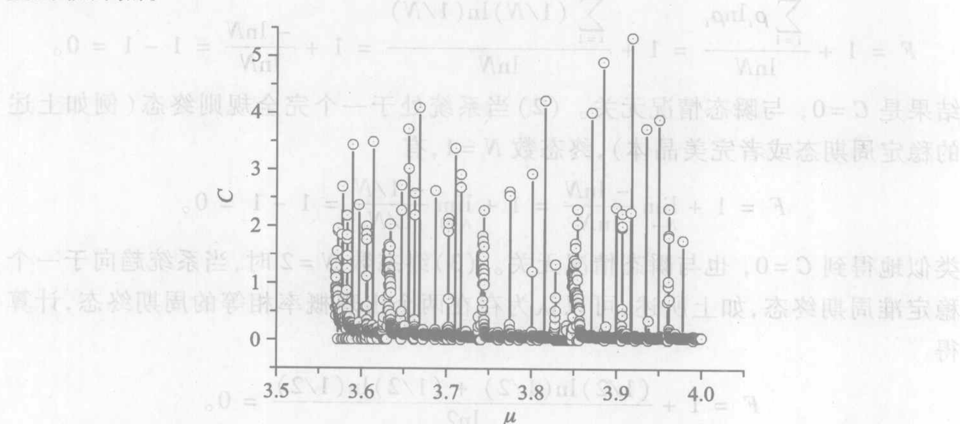


图 1.45 逻辑斯谛模型数值计算得到的 C 随参数 μ 的变化

扬州大学课题组也部分解析部分数值地求解了 1.5 节介绍过的巴克－施涅盘生态网络演化模型[25]的复杂性信息度量。得到的结果在一个很大的值 $C = 9.2 \times 10^4$ 左右。与图 1.45 所示的典型低维非线性动力学模型演示的混沌状态的复杂性信息度量值相比，巴克－施涅盘模型展示非常大的复杂性信息度量。这也许能反映混沌态和复杂态之间真正的复杂性差别。

第一章参考文献

[1] 钱学森，于景元，戴汝为．自然杂志，1990，13(1)：3.

[2] T. Vicsek, Nature, 418 (2002) 131.

[3] 于景元，刘毅．科学学研究，2002，20：449.

[4] 戴汝为，操龙兵．系统工程学报，2001，16(5)：376.

[5] 方锦清．自然杂志，2002，24(1)：7.

[6] J. Harte, Physics Today, 55 (10) (2002) 29.

[7] 复杂性专集，Science, 284 (2) (1999) 79.

[8] 林宗涵．热力学与统计物理学．北京：北京大学出版社，2007.

[9] 郝柏林，张淑誉．漫谈物理学和计算机．北京：科学出版社，1988.

[10] 唐纳德，桑德斯．计算机、信息、社会．上海：知识出版社，1985.

[11] 哈肯．信息与自组织．成都：四川教育出版社，1988.

[12] 钟义信．现代信息技术．北京：人民邮电出版社，1986.

[13] 郝柏林．科学，1999，3：3.

[14] A. N. Kolmogorov, Probl. inform. Trans., 1 (1965) 1.

[15] Chaitin G J. Information Randomness and incompleteness. Singapore: World Scientific, 1990.

[16] Balescu B. 平衡与非平衡统计力学．陈光旨，吴宝路，张奎，安庆吉，译．桂林：广西师范大学出版社，1992.

[17] 李如生．非平衡态热力学和耗散结构．北京：清华大学出版社，1986.

[18] 霍裕平，郑久仁．非平衡态统计理论．北京：科学出版社，1987.

[19] 哈肯．协同学讲座．宁存政、李应刚，译．西安：陕西科技出版社，1987.

[20] 哈肯．协同学、理论与应用．杨炳奕，译．北京：中国科技出版社，1990.

[21] 汪小帆，李翔，陈关荣．复杂网络理论及其应用．北京：清华大学出版社，2006.

[22] 郭雷，许晓明，等．复杂网络．上海：上海科技出版社，2006.

[23] 于渌，郝柏林．相变和临界现象．北京：科学出版社，1984.

[24] 屈世显，张建华．复杂系统的分形理论与应用．西安：陕西人民出版社，1996.

[25] Bak P. 大自然如何工作．李炜，蔡勖，译．武汉：华中师范大学出版社，2001.

[26] 洛伦茨．混沌的本质．刘式达，刘式适，严中伟，译．北京：气象出版社，1997.

[27] 何大韧，汪秉宏，汪颖梅，牛建军．非线性动力学引论——处处光滑与分段光滑系统的动力学特性．西安：陕西科技出版社，2001；刘宗华．混沌动力学基础及其应用．北京：高等教育出版社，2006.

[28] Ilachinski A. Cellular Automata: A Discrete Universe. Singapore: World Scientific, 2001.

[29] 谢惠民．复杂性与动力系统．上海：上海科教出版社，1994.

[30] Xie H M. Grammatical Complexity and One-Dimensional Dynamical Systems. Singapore: World Scientific, 1996.

[31] 郑伟谋，郝柏林．实用符号动力学．上海：上海科教出版社，1994.

[32] Hao B L, Zheng W M. Applied Symbolic Dynamics and Chaos. Singapore: World Scientific, 1998.

[33] Hao B L, Xie H M. Factorizable language: from dynamics to biology. Chapter 5 in "Annual Reviews of Nonlinear Science and Complexity", vol. 1, ed. by H-G. Schuster. Weinheim: Wiley-VCH, 2008: 147-186.

[34] P. Grassberger, Inter. J. Theo. Phys., 25 (9) (1986) 907.

[35] S. Lloyd and H. Pagels, Annals of physics, 188 (1988) 186.

[36] R. L-Ruiz, H. L. Mancini and X. Calbet, Phys. Lett. A, 209 (1995) 321.

[37] J. P. Crutchfield and K. Young, Phys. Rev. Lett., 63 (2) (1989) 105; J. P. Crutchfield, Physica D, 75 (1994) 11.

[38] D. P. Feldman and J. P. Crutchfield, Phys. Lett. A, 238 (1998) 244.

[39] J. S. Shiner, M. Davison and P. T. Landsberg, Phys. Rev. E, 59 (1999) 1459.

[40] D. Shen, W. X. Wang, Y. M. Jiang, Y. He and D. R. He, Chinese Physics Letters, 24 (7) (2007) 2146.

[41] Reichl L E. The Transition to Chaos in Conservative Classical Systems: Quantum Manifestations. New York: Springer, 1992.

[42] B. R. Hunt and E Ott, Phys. Rev. Lett., 76 (1996) 2254; B. R. Hunt and E Ott, Phys.

Rev. E,54 (1996) 328.

[43] P. So, S. J. Schiff, D. T. Kaplan, E. Ott, T. Sauer and C. Grebogi, Phys. Rev. Lett., 76 (1996) 4705; P. So, E. Ott, T. Sauer, B. J. Gluckman, C. Grebogi and S. J. Schiff, Phys. Rev. E,55 (1997) 5398.

[44] D. J. Watts and S. H. Strogatz, Nature, 393 (1998) 440.

[45] A-L. Barabasi and R. Albert, Science, 286 (1999) 509.

第二章 一些有关复杂网络研究的统计物理学方法

在前言中已经说过，复杂网络研究的基础知识应该列入统计物理学。统计物理学博大精深，其基础和前沿的介绍需要若干本学术专著的篇幅。我们在本章中仅能够根据自己的理解，挑选很少几个已经被证明与复杂网络研究密切相关的统计物理学思想、概念和方法予以简略介绍。

2.1 连续相变的平均场理论

我们在 1.5 节中已经介绍过三相点及临界点处发生的物态相变、铁磁相变、超导相变以及合金的有序 - 无序相变等连续相变，以及它们遵循的序参量普适规律：

$$\xi \propto \left| t - t_c \right|^{\beta}, \tag{2.1}$$

式子中 t 是温度或其他热力学相变驱动参量，t_c 是相变的临界参量值，ξ 称为序参量，它在相对的“无序相”（更普遍地说：“对称性”相对高的相）取零值；而在相对的“有序相”（更普遍地说：“对称性”相对低的相）取不为零的值。实验科学家们早就发现了一些具体相变遵循这样的规律，而且对许多不同物质的连续相变，幂律的标度因子 β 是相同的。然而，理论物理学家们在长时间内对如何对这种现象进行深入定量理论解释感到困难。

比较早地被运用来解释连续相变序参量标度律的统计物理学工具是所谓的“平均场理论”。其中影响最大的是苏联科学家朗道在 1937 年建立的连续相变理论[1-4]。统计物理学界普遍认为，朗道理论是在前人的平均场相变理论基础上发展起来的第一个普遍的连续相变理论，为几十年后威尔逊用重正化群理论证明序参量标度律，并且解析地得到与实验符合的指数因子 β 的数值做好了准备。

从历史上看，平均场方法从一开始就具有鲜明的物理背景，而且与连续相变问题密切联系。平均场方法在连续相变的研究中出现在先，只能得到与实验定性符合的结论，而重正化群方法出现在后，得到了与实验精确定量符合的结论。然而，有趣的是，近十年来的复杂网络研究广泛地采用了近似的平均场方法，而更现代的、更精确的重正化群方法却很少被用到。这说明了平均场方法的强大生命力。它易懂、易算，覆盖面广。虽然是近似，但是常常能得到很不错的结果。

实际上,几十年来,平均场方法被运用在除了相变和网络的其他许许多多不同的理论和实际问题的分析上,都取得了重要的成果。所以,我们用本节的篇幅,以比较好懂的铁磁相变为例,尽量简单地介绍朗道的连续相变理论,从而使读者对平均场方法的产生背景、基本物理思想和方法有一个初步的了解。

我们在1.5节中已经介绍过,一级相变(不连续相变)的一个特征是具有两相共存的临界变化阶段,相变具有清晰的界面,只在界面附近发生。这说明这种相变中,物质分子与其近邻的其他分子如何互相作用,结合成什么相,主要取决于分子之间的近邻相互作用性质。所有分子之间的相互作用的总体效果以及外界的"环境"对相变的总体影响并不重要。每个分子周围环境的"局部信息",例如晶格常量、晶格结构等对相变的性质起了关键作用。

与此不同,二级相变(连续相变)不具有两相共存的临界变化阶段和清晰的界面,相变在物质各处同时突然发生。如果相变状态只是很接近、并不严格等于连续相变的临界点,那么两相仍然可以区分,但相变是同时在很大一个范围内发生的。在旧相中许许多多地方同时出现的新相大大小小、形状各异,与旧相"你中有我,我中有你",形成若隐若现、此起彼伏、互相嵌套、跃跃欲变的"花斑"。这就是一种前面介绍过的分形。正像在1.5节中已经介绍过的康托尔三分集一样,分形的关键特性是显示一种(例如"康托尔三分"的)"跨越一切尺度的法则",所以分形才具有(统计或严格的)跨越一切尺度的自相似性。这说明这种相变中,物质分子与其近邻的其他分子如何互相作用,结合成什么相,主要取决于跨越一切尺度的所有分子之间的相互作用的总体效果,而每个分子周围环境的"局部信息",例如晶格常量、晶格结构等对相变的性质并不重要。这也就是物理学家所说的"在连续相变的临界点,关联长度趋于无穷"。因此,在二级相变(连续相变)中,可以把跨越一切尺度的所有分子之间的相互作用的总体效果等价于一个"平均场",不去计算局部的、处处不同的相互作用情况。这就是平均场方法的核心思想。我们强调,在几十年来许多问题的平均场方法应用中,重要的正是这个核心思想,具体的方法和计算形式常常随问题而变化。

以铁磁相变为例,实验上早就知道,当温度 T 高于"居里点" T_c 时,铁磁体中大量"自旋磁矩"的热运动占主导地位,使它们混乱取向排列的趋势压倒有序排列的趋势,导致宏观"磁化强度" μ 为零;而当温度 T 低于"居里点" T_c 时,自旋磁矩的相互作用占主导地位,使它们有序排列的趋势占优,因而宏观"磁化强度" μ 不为零,出现宏观尺度下自旋磁矩有序排列形成的"磁畴"。T 高于 T_c 的相相对无序,这时空间任何方向没有特殊性,对称性高;而 T 低于 T_c 的相中出现了自旋磁矩有序排列宏观区域,相对有序,失去了空间方向的完全对称性(称为"对称破缺")。因此,宏观磁化强度 μ 就可以被定义为铁磁相变的序参量。温度 T 就可以定义为热力学相变驱动变量。

为了从理论上导出序参量规律,首先要选择一个描述系统状态的热力学函数,它能够体现"分子之间的相互作用的总体效果",被称为"热力学势"。朗道理论选择"系统自由能 $F(T,\mu)$"作为热力学势。

朗道理论的核心假设是"系统自由能 $F(T,\mu)$ 在相变临界点附近可以展开为序参量 μ 的幂级数",即

$$F(T,\mu) = F_0(T_c) + \frac{1}{2}a(T_c)\mu^2 + \frac{1}{4}b(T_c)\mu^4 + \cdots, \tag{2.2}$$

请注意在外场为零时,μ 的正负取值不应该有区别,所以展开式中所有的奇次幂的系数应该为零。这个核心假设对于其他连续相变同样适用,只是自由能可能要变化为其他形式的热力学势。

取热力学势,并且假设它在相变临界点附近可以展开为序参量 μ 的幂级数,然后在解析讨论中舍去小量做近似。这是平均场思想的集中体现。

当 $T > T_c$ 时,$\mu = 0$,因此 $F(T,\mu) = F_0(T_c)$,为一个常数;当 $T < T_c$ 时,$\mu \neq 0$,必须考虑 $F(T,\mu)$ 依赖的 μ 的高阶项。我们在大学热力学课程中已经学过,在任一个平衡态下,必定有自由能取极小值(可以类比于重力势场中一个小球会趋向于停止在一个陷坑的最底部,也就是重力势场的极小处)。即

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \mu}\right)_T = 0,$$
$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2}\right)_T > 0。 \tag{2.3}$$

将上面的自由能对序参量 μ 的幂级数展开式中所有等于或高于四阶的幂次项略去,并且假设

$$a = a_0(T - T_c) \propto (T - T_c),$$
$$b = b_0 \text{ 为常数}, \tag{2.4}$$

将展开式代入上面的极小值条件,可以得到

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = \mu[a(T) + b\mu^2] = 0。 \tag{2.5}$$

解得

$$\mu_1 = 0,$$
$$\mu_2 = \pm\sqrt{-\frac{a(T)}{b}}。 \tag{2.6}$$

考虑极小值条件中的二阶导数关系,有

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} = a(T) + 3b\mu^2, \tag{2.7}$$

代入上面的两个解,并且注意 $T > T_c$ 时,$a = a_0(T - T_c) > 0$,得到

(1) $T > T_c$ 时，$\left.\dfrac{\partial^2 F}{\partial \mu^2}\right|_{\mu=0} = a(T) = a_0(T - T_c) > 0$，

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2}\right|_{\mu=\pm\sqrt{-\frac{a(T)}{b}}} = 2\left[\frac{1}{2}a(T) + \frac{3}{2}b\left(-\frac{a(T)}{b}\right)\right] = -2a_0(T - T_c) < 0, \tag{2.8}$$

所以 $T > T_c$ 时，解 μ_1 稳定，μ_2 不稳定。

(2) 类似地，由于 $T < T_c$ 时，$a = a_0(T - T_c) < 0$，所以可以得到解 μ_2 稳定，μ_1 不稳定。

最后的解为

$$\begin{aligned} &\mu(T) = 0, && \text{当 } T > T_c, \\ &\mu(T) = \pm\sqrt{\frac{a(T_c - T)}{b}}, && \text{当 } T < T_c。\end{aligned} \tag{2.9}$$

这就是序参量 μ 对于热力学相变驱动参量的依赖标度律。可以更一般的定义 $t = (T_c - T)$，从而把它写成(与本节最开始的标度律公式类比)

$$\xi \propto t^{\beta}，\text{其中标度因子 } \beta = 1/2。 \tag{2.10}$$

20 世纪六七十年代得到的精确实验值是：$\beta = 0.321 \sim 0.329$。威尔逊用重正化群解析得到的指数因子 β 的数值是：$\beta = 0.325 \pm 0.002$。由此可以看出平均场方法的近似性。

作为小结，连续相变平均场方法的步骤是：

(1) 引入一个标志"相对无序"向"相对有序"变化的(从零值向非零值变化的)序参量。

(2) 把复杂的微观基本单元之间的相互作用和外界作用简化为一个"平均后的场(热力学势)"。

(3) 讨论这个平均后的场(热力学势)对热力学相变驱动参量的光滑性、对称性、可展开性。

(4) 把这个平均后的场(热力学势)对热力学相变驱动参量展开，取近似，由此讨论相变的序参量对热力学相变驱动参量的关系式，特别是标度因子。

2.2 自组织临界现象的平均场理论

我们在 1.5 节中已经介绍过 1987 年巴克、汤超和威森菲尔德提出的自组织临界现象。说明自组织临界现象的最简明例子可能是沙堆。如果斜率太大，沙子就会滑落到地面；而如果斜率太小，沙漠中的风沙又会使沙子不断地沉积。因此，存在一个沙堆斜率的稳定阈值。沙堆的斜率小于阈值时，不会显示宏观的流动，运动相对无序；斜率大于阈值时，一定显示宏观的流动，表示相对有序运

动。系统会自己组织向它的阈值,并且这个阈值对应的状态是稳定的。如果微扰使系统偏离这个状态,偏离会自动地逐渐消失。所以被称为“自组织临界现象”。加沙子可能引起“雪崩”现象。沙堆上每粒沙子的局域状态都是非常不同的,有的摇摇欲坠,有的相当稳定。在不同地方加一粒沙子可能完全没有任何影响,也可能引起一大堆沙子从顶部一直滑落到底。巴克和他的助手们曾经构造了一个模型来模拟沙堆的演化,他们假设平面上每个方格子中有一竖列沙子,高度可能为0,1,2或3。高度超过3的列就会崩塌,使得高度一下子减少4,同时使它的4个相邻格子中各增加高度1。这种崩塌可能引起一系列的后续崩塌,也就是雪崩。他们用50×50的格子点阵计算证明了这个非常简单的计算机沙堆模型会自组织向临界状态,而且得到了临界状态下雪崩满足的幂律:

$$D(s) \propto s^{-\gamma}, \tag{2.11}$$

这里 s 表示一次雪崩涉及的晶格空间尺寸,$D(s)$ 表示这种尺寸的雪崩出现的概率,$\gamma \approx 1.1$。这正是前面所介绍的连续相变序参量在临界点附近遵循的幂律,不过这时出现在远离平衡开放系统中的类似规律是系统自组织达到的稳定规律。不难想象,当沙堆的斜率小于阈值时,只可能有比较小的雪崩,大的雪崩很少,而从顶部一直滑落到底的雪崩可能根本不会有。反之,当沙堆的斜率大于阈值时,大的雪崩很多,而小的雪崩很少。只有当沙堆的斜率等于阈值时,各种大、小的雪崩才都会出现,而且不同的雪崩尺寸出现的概率服从上面所示的规律。这也就是说,沙堆在所有偏离临界的状态下对微扰的响应都不够敏感、丰富,只有在临界状态时才能够对微扰显示最敏感、最丰富的响应[5-9]。

能否用2.1节所介绍的平均场方法对这个模型解析得出雪崩幂律?初看起来好像不成问题,一切似乎都差不多。连续相变就是最典型的临界现象,自组织临界现象只不过多了“自组织”这三个字。然而,这三个字却影响非常大。连续相变是理想的热力学平衡(准静态)过程,因此才能使用自由能等热力学势的概念,以及平衡态下热力学势取最小值的判据,而自组织临界现象却是远离平衡开放系统的特征。这时自由能、热力学势等概念,以及平衡态的各种判据都不存在。因此,2.1节介绍的计算过程对自组织临界现象不能使用。

我们在2.1节中强调过:在几十年来许多问题的平均场方法应用中,重要的是这个方法的核心思想,具体的方法和计算形式常常随问题而变化。这个核心思想就是:在讨论的从相对无序向相对有序的变化中,跨越一切尺度的所有基本单元之间的相互作用的总体效果起主导作用,而每个基本单元周围环境的“局部信息”并不重要,因此,可以把相互作用的总体效果等价于一个“平均场”,不去计算局部的、处处不同的相互作用情况。

这个核心思想是否适用于自组织临界现象?如果适用,那么具体计算的方法是什么?汤超和巴克在1988年发表论文回答了这个问题[8]。本节非常简单

地介绍论文[8]报道的思想、方法和结论。

首先,上述的沙堆演化模型可以一般的表述为:

在一个每一维大小为 L 的 d 维立方格子($L\times L\times\cdots$)中,任意一个格点可表示为 $\boldsymbol{r}(x,y,\cdots)$,定义一个整数变量 $Z(\boldsymbol{r})$,代表驱动沙子流动(传输)的沙堆局部斜率。如果 $Z(\boldsymbol{r})$ 大于一个临界值 Z_c,下一个时刻沙子将流动,引起 $Z(\boldsymbol{r})$ 的变化(扩散)。这可以表述为(为不失一般性假设 $Z_c=2d-1$):

如果 t 时刻 $Z(\boldsymbol{r})>Z_c=2d-1$,则 $t+1$ 时,有

$$\begin{cases} Z(\boldsymbol{r})\rightarrow Z(\boldsymbol{r})-2d, \\ Z(\boldsymbol{r}\pm\boldsymbol{n})\rightarrow Z(\boldsymbol{r}\pm\boldsymbol{n})+1, \end{cases} \quad \boldsymbol{n}=\pm\boldsymbol{e}_1,\pm\boldsymbol{e}_2,\cdots,\pm\boldsymbol{e}_d。\tag{2.12}$$

其中 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 表示单位矢量。

我们可以类似地定义序参量。当沙堆的"平均斜率"$\theta=\langle Z\rangle$ 小于一个临界值 θ_c 时,不会出现"平均的自发流动",或者说"平均自发流密度"$j=J/L^d=0$(其中 J 为所有 $Z>Z_c$ 的格点数,为总的沙子流),各个方向相对对称,标志相对无序的状态;而当 $\theta>\theta_c$ 时,$j\neq0$(开始有雪崩),各个方向相对不对称(发生对称破缺),标志相对有序的状态。因此,可以把平均自发流密度 $j=J/L^d$ 定义为序参量,把 $\theta=\langle Z\rangle$ 定义为类似的"热力学驱动量"。

为了简化且不失一般性,只讨论一维情况。这时 $Z_c=2d-1=1$,认为

$$\begin{cases} Z>Z_c=1\text{ 时为"活点",记为 }A(Z=2,3,\cdots), \\ Z\leqslant Z_c=1\text{ 时为"死点",记为 }I(Z=0,1)。 \end{cases}\tag{2.13}$$

假定有一外场 h,使状态 $Z(\boldsymbol{r})$ 为 0 时以概率 h 变为 $Z(\boldsymbol{r})+1$。讨论任一个状态为 $Z=0$ 的格点,如果它两个邻居中的一个是活点,则下一步以 $1-h$ 的概率变为状态 $Z=1$;如果两个邻居都是死点,则下一步以 h 的概率变为状态 $Z=1$。即它在 t 时刻:

$$\begin{cases} \text{有 }1-h\text{ 概率加一粒沙(二邻座有一个活),记为 }0\rightarrow1, \\ \text{有 }h\text{ 概率加一粒沙(二邻座均死),记为 }0\rightarrow1。 \end{cases}\tag{2.14}$$

可以从概率角度列出由死变活的"反应方程"为:$0\xrightarrow{2(1-h)AI,hI^2}1$,所以平均来看,从死变活反应的发生概率为:$2(1-h)p_0p_Ap_I+hp_0p_I^2$,其中 p_0 表示格点为 0 的概率;p_A 表示 0 格点邻座为 A 的概率;p_I 表示 0 格点邻座为 I 的概率。请注意:实际上的沙子邻座之间相互作用情况千变万化,取决于每粒沙子周围环境的"局部信息",可能有的摇摇欲坠但是就是不崩塌,也可能有的相当稳定,即使接受了邻座给予的一粒沙子也不崩塌,当然也可能有些沙子没有邻座的作用也会自己崩塌;但是,这里从平均的、概率的角度考虑,把演化的机制简化为一个非常简单的表示式,相当于只考虑相互作用的总体效果。这就是平均场方法核心思想的体现。

在临界点附近,平均自发流密度 j 和加沙概率 h 均是小量($p_A=j$ 也是小量),所以,如果只讨论到 $Z=2$ 的格点概率 p_2,$Z=3$ 的格点概率 p_3,$0 \xrightarrow{2(1-h)AI,hI^2} 1$ 的变化率可以写为

$$2p_0p_2(1-p_2)+2p_0p_3+hp_0-4hp_0p_2。\tag{2.15}$$

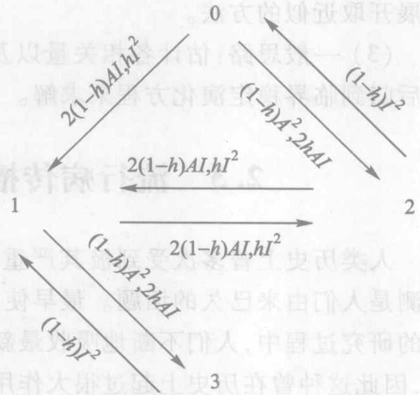


图 2.1 沙堆演化所有可能的反应(引自文献[8])

所有可能的反应可以用图 2.1 表示。当所有格点状态的流出流速等于流入流速时,系统达到稳定。类似地,如果对其他的变化率也只讨论到 $Z=2$ 的格点概率 p_2,$Z=3$ 的格点概率 p_3,可以得到公式[8]:

$$\begin{aligned}
&p_2(1-p_2)^2-hp_2=2p_0p_2(1-p_2)+2p_0p_3+hp_0+p_0p_2^2-2hp_0p_2,\\
&2p_0p_2(1-p_2)+2p_0p_3+hp_0+2p_2^2+p_3+hp_2-4h_0p_0p_2\\
&\quad=2p_1p_2(1-p_2)+2p_1p_3+hp_1+p_1p_2^2-2hp_1p_2,\\
&2hp_0p_2-4hp_1p_2+2p_1p_2(1-p_2)+2p_1p_3+hp_1+p_0p_2^2=p_2,\\
&p_1p_2^2+2hp_1p_2=p_3,
\end{aligned}\tag{2.16}$$

对确定的 p_0,p_1,p_2,p_3(归一)的概率分布,可以得出平均沙滩斜率为

$$\theta=0\times p_0+1\times p_1+2\times p_2+3\times p_3。\tag{2.17}$$

这些公式就是这种情况的平均场方程。

从平均场方程可以解出序参量:

$$j=p_2+p_3\approx p_2。\tag{2.18}$$

考虑通常的最低阶近似,有

$$4p_2^2+(1-2\theta+2h)p_2-h\theta=0。\tag{2.19}$$

如果只考虑自组织情况,即不从外界加入沙子,则有 $h=0$,也就是 $p_2=0$,则有

$$p_2=j=(1/2)(\theta-\theta_c)。\tag{2.20}$$

对比前面所述的临界现象序参量标度律,可以知道这就是自组织临界现象用平均场方法得到的序参量标度律 $j\propto(\theta-\theta_c)^\beta$。标度因子为:$\beta=1$。类似地,对更高的维数可以得到:二维:$\beta=0.7$,三维:$\beta=0.82$。

作为小结,自组织临界现象的平均场方法的特点是:

(1) 不能期望像平衡态临界现象那样,根据序参量的对称性写出来某个热力学势的临界点展开式。

(2) 保留了序参量、类似热力学驱动变量的概念,以及在临界点附近把序参

量展开取近似的方法。

(3) 一般思路:估计各相关量以及演化规律的概率表示,找到合适的近似,最后归到临界稳定演化方程来求解。

2.3 流行病传播的平均场理论简介

人类历史上曾多次受到极其严重的流行病的威胁,因此对流行病的描述和预测是人们由来已久的话题。最早使用的完全是总结经验型的统计方法。在漫长的研究过程中,人们不断地吸收最新数学和物理成果,使统计方法不断得到改进,因此这种曾在历史上起过很大作用的方法直到今天仍然是重要的研究手段。然而,大家总希望研究灾难的人做出预报,而预报必须有一个演化模型作依据。如果一个系统完全没有确定的(或者统计规律的)演化法则,那么不管已经有了多少数据,以后的数据也可以任意变化。虽然从1840年以来就有人试探运用简单的数学模型来建立流行病传播的模型并进行预测,然而直到20世纪的四五十年代,以微分方程为主的模型才开始受到重视[10,11]。这些模型至今为止仍具有重要的学术地位。其中最有影响的是所谓SIR和SIS模型[12,13]。SIR模型是瑞德(Reed)和弗洛斯特(Frost)在1920年的一篇未发表论文中首先提出的。它把人群分为三组:未患病但可感染(susceptible)、病人且可传染别人(infected)、治愈且终生免疫(recovered)。麻疹是最典型的这类流行病。传统的SIR模型假设一个未患病但可感染者(s)以均匀概率β被任一个病人(i)感染,一个病人(i)以一个常数比例γ随机地康复且变为终生免疫(r)。这样,三类人的演化方程为

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\beta is,$$
$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \beta is - \gamma i, \tag{2.21}$$
$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \gamma i。$$

也有一些流行病在治愈后并不能免疫,可能立即再次感染。肺结核和淋病常用作这样的例子。这时人群也可分为三组:未患病但可感染(susceptible)、病人且可传染别人(infected)、治愈但仍可感染(susceptible),这就是SIS模型。类似地,SIS模型的演化方程为

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\beta is + \gamma i,$$
$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \beta is - \gamma i。 \tag{2.22}$$

我们在1.5节中已经介绍过连续相变和临界现象。在2.1节中我们强调过连续相变是一个理想的平衡过程。然而,以广义的序参量标度律的幂律为标志的临界现象涉及更广泛的领域。这些现象都可以看作某种广义相变,但是大多数是远离平衡的,例如流体中对流的形成[14]、流行病的全局传播的开始[15]、生物集体运动的形成[16]等。1.5节中已经介绍过的逾渗相变是一个重要的临界现象例证。设想用大小相同的导电球和绝缘球排列成一层,铺满一个正方形的平面池子,且两种球在池子中的密度比P可以连续地变化。理论和实验研究都证明:在P小于一个阈值P_c时,导电球连接成为一个横跨池子的连通分支,从而使电流能够流过整个池子的可能性为零,而在P等于P_c时,横跨池子的最大导电连通分支将突然出现。这种临界现象同样很好地遵从序参量普适规律。近些年来,对逾渗相变的研究成果非常丰富,已经成为一个专门的学科。其中大多数类型的逾渗相变是远离平衡的。因此,广义的序参量普适规律是跨越平衡-非平衡边界的普遍规律。

已经从理论上严格证明:以"流行病的全局传播的开始"为代表的"一类某种活动的传播与消亡"的广义相变,和逾渗相变的一种(有向逾渗)在一定条件下可以归于同一个"普适类",可以用完全相同的广义序参量普适规律来描述[17,18]。这里,在活动的消亡态(流行病停止流行的状态),活动的"标志量"(病人的"密度"ρ)为零,各个方向相对对称,系统相对无序;而在活动的传播态(流行病正在流行的状态),病人密度ρ大于零,各个方向相对不对称,出现了对称破缺,系统相对有序。所以可以把病人密度ρ定义为广义的序参量。对于流行病和其他活动的传播,大量的实验和理论结果都证明存在一个传播速率λ的阈值λ_c,只有在$\lambda-\lambda_c>0$时,流行病才能全局传播,因此可以把$\lambda-\lambda_c$定义为热力学驱动量。现在的问题就是利用我们在本章前两节中介绍的平均场近似方法的思想,写出这类活动传播问题的平均场方程,然后在一定条件下求解。

我们在2.1节和2.2节中强调过:在平均场方法应用中,重要的是核心思想,具体的方法和计算形式常常随问题而变化。这个核心思想就是:在讨论的从相对无序向相对有序的变化中,跨越一切尺度的所有基本单元之间的相互作用的总体效果起主导作用,而每个基本单元周围环境的"局部信息"并不重要,因此,可以把相互作用的总体效果等价于一个"平均场",不去计算局部的、处处不同的相互作用情况。流行病的传播过程中显然充满了基本单元周围局部信息的影响。一个病人在可传染期间都密切接触哪些人、接触的人的天然免疫功能如何、被传染的人的医疗条件如何、本身的康复能力如何等许多因素都可能剧烈地影响传播的进程[19]。平均场方法的思想就是抛开这些具体细节,仅仅考虑全局的、平均的传播可能性,也就是仅考虑被看做常参量(或者是依赖于某几个全局因素的可变参量)的传播概率或者传播速率λ,以及康复概率γ。这样,对于病

人可治愈且终生免疫的情况,显然可感染人群、病人和治愈且终生免疫人群分别的人数变化率的最简化表述就是SIR模型;而治愈后并不能免疫,可能立即再次感染情况的最简化表述就是SIS模型。所以,传统的SIR模型或SIS模型就是流行病传播的平均场方程。它们可以用大家熟悉的微分方程解法来求解,但是并不代表还原论方法论框架下的系统动力学机制。其微分方程形式当然是决定论的,但是意义与诸如牛顿第二定律这样的还原论方法论框架下的系统动力学方程完全不同。

一个有限人群中的一次具体流行病的传播当然受到上述的每个人周围的局部信息,以及他周围病源的性质、行政控制措施、人群的警惕性和卫生习惯以及医疗条件等具体因素的影响。这些局部信息处处不同,所以各个人群中许多次流行病的传播会显示对序参量普适规律非常大的统计涨落。然而,如果这些局部信息遵循一个理想的正态随机分布,那么对于无限大人群中无限多次流行病的传播,平均场方程一定就是精确的。这正表示了SIR模型或SIS模型微分方程的意义。

平均场方法可能是统计物理学在复杂网络研究中应用最多的思想和方法。在本书第7章中,我们将更多地讨论平均场方法及其运用;在第8章中,将更仔细地讨论流行病传播及其平均场方法。

2.4　主　方　程

主方程是统计物理学中描述一大类问题的重要方法,在复杂网络研究中已经有比较多的应用。在本节中我们将简单地介绍这种方法的由来与思想,不注重一些证明、推导的细节。如果有些读者希望作更严格、仔细的了解,请参阅文献[20]。

2.4.1　马尔可夫过程

马尔可夫过程定义为:演化过程中大部分记忆效应可以略去的过程("健忘过程")。或者说,假定演化每一步 t_k 时的状态已知,则在 $t>t_k$ 时的状态与 t_k 之前的状态无关。

马尔可夫过程更准确的数学定义为:设 $\{X(t),t\in T\}$ 为一个随机过程,E 为其状态空间,若对任意 $n\geqslant 1,t_1<t_2<\cdots<t_n<t\in T$,有 $x_1,x_2,\cdots,x_n,x\in E$,且 $X(t)$ 在已知条件 $X(t_1)=x_1,X(t_2)=x_2,\cdots,X(t_n)=x_n$ 下的条件概率分布满足

$$P\{X(t)=x\Big|_{X(t_n)=x_n,\cdots,X(t_1)=x_1}\}=P\{X(t)=x\Big|_{X(t_n)=x_n}\},\qquad(2.23)$$

则称 $\{X(t),t\in T\}$ 为一个马尔可夫过程。

2.4.2 马尔可夫链

马尔可夫链是马尔可夫过程最简单的例子之一，它的准确数学定义为：设$\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$为一个随机过程，其状态集合为$E=\{i_0, i_1, i_2, \cdots\}$，若对任意$n$以及$i_0, i_1, i_2, \cdots, i_{n+1}$，对应的随机变量$X(0), X(1), X(2), \cdots, X(n+1)$满足

$$P\{X(n+1)=j \mid X(n)=i_n, X(n-1)=i_{n-1}, \cdots, X(1)=i_1, X(0)=i_0\}$$

$$=P\{X(n+1)=j \mid X(n)=i_n\}, \tag{2.24}$$

其中$P\{X(n+1)=j \mid X(n)=i_n\}$表示系统处在状态$j$的概率，则称$\{X(n), n=0, 1,2,\cdots\}$为一个马尔可夫链。也就是说，在上述马尔可夫过程数学定义中，如果参数集$T=\{t_1, t_2, \cdots\}$为离散的，状态集$E=\{x_1, x_2, \cdots\}$也是离散的，这个马尔可夫过程就称为一个马尔可夫链。

2.4.3 一步转移概率

一个马尔可夫链在时刻k处于状态i，而在下一个时刻$k+1$处于状态j的条件概率

$$P\{X(k+1)=j \mid X(k)=i\}=P_{ij}(k), \quad k=0,1,2,\cdots, \tag{2.25}$$

就称为它的一步转移概率。

马尔可夫链的一步转移概率具有以下性质：

(1) $P_{ij}(k)\geqslant 0, \ \forall i,j\in E$。

(2) $\sum\limits_{j\in E} P_{ij}(k)=1, \ \forall i\in E$。

2.4.4 一个简单的例子[21]

从1,2,3,4,5,6这六个数字中等概率地取出一个数字，取后还原。如此不断地进行。在前n次中取得的最大数字为j，称“过程的第n步在状态j”。

1. 证明此过程是一个马尔可夫链

令X_n=前n次中取得的最大数字($n\geqslant 1$)，则X_n的可能取值为这六个数字，即状态空间为$E=\{1,2,3,4,5,6\}$，参数空间为$T=\{n|n\geqslant 1\}$。若X_n取值为i，X_{n+1}取值为j，且$j\geqslant i\in E$，则显然X_{n+1}取值只与X_n取值有关(即前$n+1$次中取得的最大数字只与前n次中取得的最大数字有关，这里的关键在于“最大”。前$n+1$次中取得的数字是否最大，只要与前n次中取得的最大数字相比较就可以)。所以$\{X_n, n\geqslant 1\}$构成一个马尔可夫链。

2. 写出这个马尔可夫链的一步转移概率

(1) 若 $P\{X(k+1)=j \mid X(k)=i\}=P_{ij}(k)$ 中有 $i=1$,即前 n 次都抽到 1,则下一步抽到任何数字都是最大值。所以 $j=1,2,3,4,5,6$ 的条件概率为

$$P\{X(n+1)=j \mid X(n)=1\}=1/6$$

可以记做:$P_{1,1}=1/6$。

(2) 若 $i=2$,即前 n 次曾抽到 2,则下一步至少要抽到 2 才是最大值。即 $P_{2,1}=0$; $P_{2,j}=1/6$, $j=3,4,5,6$; $P_{2,2}=2/6$(这是由于下一步不管抽到 1 或者 2,前 $n+1$ 步抽到的最大值都仍旧是 2)。

(3) 如此类推,可以得到通式:

$$\begin{aligned} P_{ij}&=0, & &\text{若}\quad j<i \\ P_{ij}&=j/6, & &\text{若}\quad j=i,\ i,j=1,2,3,4,5,6. \\ P_{ij}&=1/6, & &\text{若}\quad j>i, \end{aligned} \tag{2.26}$$

(4) 可以把这些结果表示为一个"一步转移概率矩阵":

$$P=i\overset{j}{\begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}。 \tag{2.27}$$

这种一步转移概率矩阵的定义和写法是普遍的。

2.4.5 n 步转移概率

一个马尔可夫链在时刻 k 处于状态 i,而在 n 步之后 $k+n$ 时刻处于状态 j 的条件概率

$$P_{ij}^{(n)}(k)=P\{X(k+n)=j \mid X(k)=i\}, \tag{2.28}$$

称为它的 n 步转移概率。规定:零步转移概率为

$$P_{ij}^{(0)}(k)=\delta_{ij} \quad (\delta_{ij}=1,\text{若 } i=j;\ \ \delta_{ij}=0,\text{若 } i\neq j)。 \tag{2.29}$$

2.4.6 切普曼-柯尔莫哥洛夫方程(C-K 方程)

设 $\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$ 为一个马尔可夫链,它的状态空间为 $E=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$,则其 n 步转移概率满足

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(n)}(r) &= \sum_{k\in E} P_{ik}^{(m)}(r)P_{kj}^{(n-m)}(r+m), \\ & i,j\in E,\quad 1\leqslant m\leqslant n,\quad r\in T, \end{aligned} \tag{2.30}$$

相应的 n 步转移矩阵满足

$$P^{(n)}(r)=P^{(m)}(r)P^{(n-m)}(r+m)。\tag{2.31}$$

也就是说,马尔可夫链上的 n 步转移概率等于先转移 m 步,再转移 $n-m$ 步的转移概率乘积。

C-K 方程的严格证明需要比较大的篇幅,本书从略。有兴趣的读者请参看文献[20]。

2.4.7 主方程

对 C-K 方程积分,并利用统计物理学中的约化条件,可以得到(详细证明从略,有兴趣的读者请参看文献[20]):对于虽然每一个演化时刻都可能在若干可能状态中随机选择,但是最终会选定一个确定状态的马尔可夫链,主方程为

$$P(n,t+1)-P(n,t)=W(n,n')P(n',t)-W(n',n)P(n,t)\tag{2.32}$$

其中 $W(n,n')$ 表示 t 时刻取 n' 状态,$t+1$ 时刻取 n 状态的转移概率密度,$P(n,t)$ 表示 t 时刻取 n 状态的概率密度。

对于一般的情况,每个时刻可能有若干个以不同概率出现的状态,而且时间可能准连续地变化,这时更一般的主方程形式为

$$\frac{\mathrm{d}P(n,t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{n'\neq n}\{W(n,n')P(n',t)-W(n',n)P(n,t)\}。\tag{2.33}$$

参数集和状态集都准连续的马尔可夫过程(不是马尔可夫链)的主方程为

$$\frac{\partial P(y_2,t)}{\partial t}=\int \mathrm{d}y_1\{W(y_2,y_1)P(y_1,t)-W(y_1,y_2)P(y_2,t)\},\tag{2.34}$$

其中 $W(y_1,y_2)$ 表示 y_1 在 t 到 $t+\tau$ 时间内从 y_1 状态变化到 y_2 状态的“单位时间转移概率密度”,$P(y,t)$ 表示 t 时刻取 y 状态的概率密度。

主方程已经在复杂网络研究中应用比较多。在本书第 7 章中,我们还将再次回到主方程及其运用的讨论。

2.5 生成函数

生成函数是复杂网络研究中应用比较多的另一种统计物理学方法。我们举一个简单的例子来说明生成函数的思想。如果有一个养鱼专家,他把某种待研究的鱼一代一代的培养,同时在每一代的大量样本中严格挑选少数优秀的,作为繁殖下一代的种群。为了不断扩大种群数量,同时保证其中个体的质量,他严格保持每一代的个数和上一代个数的关系,用递推公式 $a_{n+1}=2a_n+n(n\geqslant 0,a_0=1)$ 来表示。如果我们需要知道任何一代的个数,由此公式可以逐步推算得到,但是如果要求拿出来一个第 n 代个数 a_n 的显函表示式,可能一时还比较为难。

生成函数方法就是试图构造一个形式幂级数 $G(a_n;x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，然后由此来解出 a_n 的显函表示式。

考虑到 $\sum_{n\geqslant 0} a_{n+1}x^n = (G(x) - a_0)/x = (G(x) - 1)/x$, $\sum_{n\geqslant 0} 2a_n = 2G(x)$ 及 $\sum_{n\geqslant 0} nx^n = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n\geqslant 0} x^n = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$，我们得到

$$\frac{G(x)-1}{x} = 2G(x) + \frac{x}{(1-x)^2}。\tag{2.35}$$

于是得到

$$G(x) = \frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2(1-2x)}。\tag{2.36}$$

令 $x=1$ 就得到数列和。很显然，此时 $G(x) = \infty$，这与数列级数和 $1+3+8+9+L+(2a_n+n)+L=\infty$ 相一致。

若要进一步得到数列的表达式时，可进行如下操作：

$$G(x) = \frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2(1-2x)} = \frac{-1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-2x}。\tag{2.37}$$

将 $1/(1-2x)$ 展成几何级数时，其系数为 2^n；对级数 $-1/(1-x)^2$，参照上面 $\sum_{n\geqslant 0} nx^n$ 的做法，可得 x^n 的系数为 $-(n+1)$。于是序列的表达式（第 n 次迭代得到的 a_n 的显函表示式）为

$$a_n = 2^{n+1} - n - 1 \quad (n\geqslant 0)。\tag{2.38}$$

所以，一个离散数字序列 a_n 的生成函数（的定义）就是一个形式幂级数，通常可表示为形式变量 x 的封闭形式，其系数包含序列 a_n 的信息。由于生成函数为形式幂级数，它不需要对所有的 x 值收敛。上面介绍的是单序列的一般（ordinary）生成函数，它可以表达为单变量的多项式。双序列的一般生成函数则可表示为两变量序列[21]：

$$G(a_{m,n};x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n}x^m y^n。\tag{2.39}$$

在复杂网络研究中，生成函数主要用来求分布函数的平均值、均方差及其他高阶矩。比如考虑一个整数时间序列，假定其取 n 的概率为 $f(n)$（代表一个网络统计参量的分布函数），则有

$$\sum_{n\geqslant 0} f(n) = 1,$$

$$\mu = \sum_n nf(n), \tag{2.40}$$

$$\sigma^2 = \sum_n (n-\mu)^2 f(n)$$

其中 μ 与 σ 分别为平均值与均方差。定义生成函数 $G(x) = \sum_{n\geq 0} x^n f(n)$，则平均值可表示为 $\mu = G'(1)$，由

$$G'(x) = \sum_n nx^{n-1}f(n) = \sum_n nx^n f(n)/x,$$

得

$$G''(x) = \sum_n n^2 x^{n-1} f(n)/x - \sum_n nx^n f(n)/x^2,$$

故

$$\sum_n n^2 f(n) = G''(1) + G'(1)。 \tag{2.41}$$

代入 σ^2，可得

$$\sigma^2 = G''(1) + G'(1) - G'^2(1)。 \tag{2.42}$$

可见，生成函数是求解分立问题的有力工具。本节所介绍的仅是生成函数应用的一小部分内容。除此之外，生成函数可用于发现序列的递推关系；发现序列间的关系；探索序列的渐进行为；解决组合数学的枚举问题；以及估计无穷求和等，在组合数学、概率理论、统计学、马尔可夫链及数论中有广泛应用。对于各具体问题，存在着不同的生成函数构造方法，如上面介绍的一般生成函数，此外还有指数生成函数、Lambert 序列、Bell 序列及 Dirichlet 序列等[22]。

2.6 率 方 程

率方程是另一个在复杂网络研究中得到应用的统计物理学方法。率方程也称为速率方程，在化学、各个工程学科和社会科学学科中都有广泛的应用。其思想和方法相当简单易懂，就是用微分方程的形式表示某个过程的演化速率与某一个或者某几个演化因子之间的关系。使用这种方法的关键在于分析演化速率与主要演化因子之间关系的具体函数。

以化学反应为例，反应速率与反应参数（浓度、温度等）的关系一般可写为

$$\frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = f(c), \tag{2.43}$$

其中 c 为反应物浓度，$f(c)$ 为它的一个函数，由具体反映特征和考虑的精度决定。

我们将在第 7 章中介绍本章介绍方法的一些应用，也将介绍率方程在复杂网络研究中应用的例子。

第二章参考文献

[1] 于渌，郝柏林．相变和临界现象．北京：科学出版社，1984.

[2] 林宗涵．热力学与统计物理学．北京：北京大学出版社,2007.
[3] Landau L D, Lifshitz E M. Statistical Physics. 3rd ed. London: Pergamon Press, 1986.
[4] Stanley H E. Introduction to Phase transition and Critical Phenomena. New York: Oxford Univ. Press, 1971.
[5] P. Bak, C. Tang and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett., 59 (1987) 381.
[6] P. Bak, C. Tang and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. A, 38 (1988) 364.
[7] P. Bak and C. Tang, Phys. Rev. Lett., 60 (1988) 2347.
[8] C. Tang and P. Bak, J. Sat. Phys., 51(5/6) (1988) 797.
[9] Bak P. 大自然如何工作．李炜，蔡勖，译．武汉：华中师范大学出版社，2001.
[10] Lilienfeld A M. 流行病学基础．俞焕文，译．上海：上海科技出版社，1981.
[11] 华西医科大学流行病学教研室．流行病学研究方法．成都：华西医科大学内部教材,1985.
[12] Bailey N T J. The Mathematical Theory of Infections Diseases and Its Applications. New York: Hafner Press,1975.
[13] Anderson R M, May R M. Infections Diseases of Humans. Oxford: Oxford University Press,1991.
[14] G. Ahlers. Critical phenomena near bifurcations in systems far from equilibrium. talk presented at STATPHYS 21 conference.
[15] R. Dickman, Physica A, 306 (2002) 90.
[16] J. Zhang, Y. Zhao, B. Tian, L. Peng, H. T. Zhang, B. H. Wang, T. Zhou, Accelerating consensus of self-driven swarm via adaptive speed, arXiv:0711.3896v1 [cond-mat. dis-nn] 25 Nov 2007.
[17] H. K. Janssen, Z. Phys. B, 42 (1981) 151.
[18] P. Grassberger, Z. Phys. B, 47 (1982) 365.
[19] 许田,张培培,姜玉梅,苏蓓蓓,何大韧．自然杂志,2004,26(1):20.
[20] 雷克 L E. 统计物理现代教程．黄畇,夏蒙芬,仇韵清,赵凯华,译．北京:北京大学出版社,1983.
[21] 李裕奇,李永红．随机过程．北京:国防工业出版社,2005.
[22] Wilf H S. Generating functionology. 2nd ed. Academic Press, 1994.

第三章 博弈论及演化网络博弈

生物系统和社会系统可能是最典型的复杂系统。把物理学以及其他定量科学发展、拓宽到这些领域无疑对于人类至关重要。近半个多世纪以来,生物系统的定量科学描述有了很大进展,然而社会科学领域的定量科学描述依然任重而道远。除了已经具有近百年历史的社会网络研究方法之外,"博弈论"是社会系统研究的另一个主要定量科学工具[1-5](本章前几节主要取材于文献[1-5],文中不再一一具体说明),因此也应该属于本书介绍的基础知识之一。"博"在中国古语中有搏斗、赌博、拼搏、冒险等意思,"弈"就是下棋,因此博弈论就是根据一定规则和对手的情况,来决定自己的策略,从而最大可能地获得自己最大利益的科学,也许可以称为"有生命系统的动力学"。博弈论对参与博弈的"参与者"或者称为"局中人"的基本假设是:(1)完全理性,即具有完全的获取信息、然后进行分析推理的能力;(2)完全自私,即进行博弈的目的完全在于使自己的利益最大化。在这样简单的假定下,博弈论进行完全逻辑推理性的分析,得出了很丰富的、在相当程度上能说明实际的成果。这一点也与传统动力学相似。因此,博弈论成为社会学、经济学以至军事、政治等社会科学学科中大家非常注意的科学工具。实际上,博弈论适用于所有具有自主能力个体构成的复杂体系,因此在生物学、生态学等领域同样受到重视。不少中国学者认为中国人有博弈论研究的传统和文化思维的优势[3]。我国最早进行博弈理论研究的中科院院士、《复杂系统与复杂性科学》杂志主编、青岛大学教授张嗣瀛说:"我国古代的田忌赛马、黔驴技穷等故事就是博弈论应用的典范。在20年前,我国的博弈理论研究就和国际水平同步,中外数学家在共同开发研究这一新的领域。"

复杂网络很可能提供了一个对复杂系统,包括复杂自适应系统的很好的描述工具,但是作为动力学框架,还缺乏能够包容动力学法则的内容和方法。有相当一些人对博弈论进一步发展、作为复杂系统普遍动力学工具抱有希望,因而在思考把复杂网络与博弈论结合的可能。本章介绍博弈论的一些基本概念和最著名成就,以及把博弈论与复杂网络结合的一些尝试。

3.1 基本概念

3.1.1 博弈论的发展历史

与绝大多数数学分支相比,博弈论是非常年轻的。虽然关于政治、人际关系、商业关系等等的策略研究古已有之,而且19世纪之后,在欧洲也已经出现了少数零散地研究博弈论的论文,但是真正、系统的“博弈论科学”,尤其可以称为数学的博弈论理论可能要从1944年冯·诺伊曼(John Von Neumann)和摩根斯坦(Oskar Morgenstern)出版《博弈论与经济行为》这本书开始[6]。这里的冯·诺伊曼就是本书1.2和1.7节介绍过的计算机和原胞自动机的创始人(之一),大家在我们这本薄薄的小书中就已经看到他作为三个大科学领域的创始人出现。另一位创始人是奥地利经济学家摩根斯坦(图3.1),他在20世纪30年代就进行博弈论的研究,也知道冯·诺伊曼的博弈论论文,但是直到1938年,摩根斯坦因为纳粹德国占领奥地利而流亡美国,受聘于普林斯顿大学之后,才得以与诺伊曼相见,深入交流博弈理论的问题,最终合作写出了这部两卷本的巨著(文献[6])。

在冯·诺伊曼和摩根斯坦出版《博弈论与经济行为》之后,博弈论研究最大事件应该是1994年约翰·纳什(John Nash)、塞尔屯(Reinhard Selten)和约翰·海萨尼(John C. Harsanyi)(图3.2)同获诺贝尔经济学奖。


图3.1 摩根斯坦(1902—1976)

纳什1928年出生于美国弗吉尼亚州的布鲁弗尔德。1948年他到普林斯顿大学数学系读博士的时候还不到20岁。冯·诺伊曼正在这里执教。他的博士论文《非合作博弈》和同名的学术论文确立了22岁的纳什在非合作博弈理论研究中的奠基者地位,其中提出的“纳什均衡”使他在1994年获得诺贝尔经济学奖。此后,纳什身患重病,曾经停止工作30多年,但是他最终恢复过来,在2002年还来到中国参加会议,并且成为青岛大学理工学院的名誉教授。塞尔屯1930年出生于当时属于德国的布雷斯劳(Breslau,现在的波兰西南部城市弗罗茨瓦夫)。1961在德国法兰克福大学获得博士学位。在美国短暂任职后,1969年担任德国柏林自由大学教授。1984年至今担任波恩大学教授。海萨尼1920年出生于匈牙利的布达佩斯。1947年获得布达佩斯大学哲学博士学位。1958年获得美国斯坦福大学经济学博士学位。1961年在美国底特律的韦恩州大学作经济学教授。1964年担任加州大学(伯克利)商学院教授,直到1990

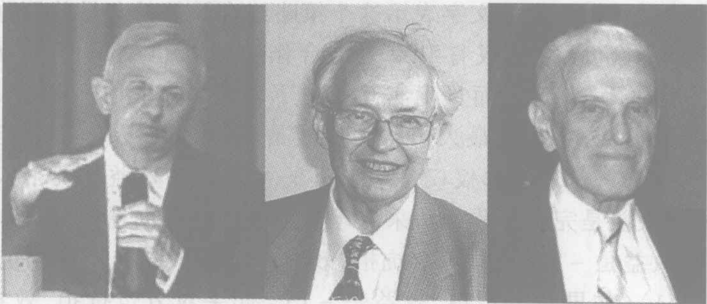


图 3.2 纳什、塞尔屯和海萨尼(自左至右)

年退休。纳什、塞尔屯和海萨尼的研究成果构成了博弈论理论中最严谨、最完整的部分。我们将在下面几节中简单地介绍。

3.1.2 博弈论的分类以及一些重要概念

3.1.2.1 合作博弈与非合作博弈

如果参加博弈的局中人可以"达成有约束力的合作协议",也就是说,在博弈中,局中人可以在互相信任的基础上共同寻求使大家都获利最大、损失最小的策略,而且这种互相信任的约定一定会被遵守,则把这种博弈称为"合作博弈"。

如果参加博弈的局中人不能或不被允许"达成有约束力的合作协议",或者虽然达成协议但不被遵守,则把这种博弈称为"非合作博弈"。

举一个著名的简单例子:有两个小偷被抓进派出所,然后被单独审讯且警告:"坦白从宽、抗拒从严"。这时每个人可能的"策略"只有两个:"坦白"或"抗拒"。如果一人坦白另一人抗拒,坦白者将因为立功而被当场释放,抗拒者将被重罚,监禁 15 个月;如果双双坦白,则犯罪成立,各监禁 8 个月;如果双双抗拒,则因为证据不足,各被刑事拘留 1 个月。从两人关系的角度,坦白可以被称为"背叛"(defect,简称 D),抗拒反而被称为"合作"(cooperation,简称 C)。如果两个人都"具有完全信息",即知道关于所有博弈局中人的可能策略、每种自己策略和对手策略组合分别给各人带来的"效益"以及所有博弈对手的特征等一切有关博弈决策的知识,而且都会完全理性地分析这些信息,选择使自己利益最大化的决策,可以列出如下的"效益矩阵",来协助判断双方的最佳决策:

乙 \ 甲	坦白	抗拒
坦白	-8, -8 (P)	0, -15 (T)
抗拒	-15, 0 (S)	-1, -1 (R)

其中每个矩阵元表示一个"效益向量",它的两个数字分别表示甲或乙采取相应

决策获得的效益。括号内的文字表示这个策略组合及效益向量的简称。

如果两个小偷可以“达成有约束力的合作协议”，也就是说，他们已经“合作”过多次，彼此无限信任，而且确实互相决不背叛（或者由于黑帮头子的威胁而不敢背叛），则双方共同的最大效益解显然是 R；但是如果他们不能达成有约束力的合作协议，每一个人都仅仅考虑自己的可能最大效益。两个人的可能策略组合及相应效益是完全对称的。采取坦白策略的效益向量为：（－8，0）（如果对方也坦白，效益是－8，如果对方抗拒，效益是0）；采取抗拒策略的效益向量为：（－15，－1）（如果对方坦白，效益是－15，如果对方也抗拒，效益是－1）。两者相比，坦白是“优策略”，也就是说，每个人都会想：如果他抗拒，则我最好坦白，就可当场释放；如果他坦白，则我当然也必须坦白，只坐牢8个月，否则要15个月，所以无论如何都必须坦白；而另一个人也会这样分析，所以也必须坦白，别无选择。这样，这时两人的最优决策组合会形成“双方背叛－8，－8（P）”这个非合作的“博弈者会自动遵守的策略僵局”，任何一方改变此策略都会遭受更大的损失。这就是纳什最先提出的“非合作完全信息博弈的纳什均衡”，在这个例子中，纳什均衡解对博弈双方对称。

这个著名博弈例子被称为“囚徒窘境”（prisoner’s dilemma game，简称 PDG）。上面所列举的数字只是举例，容易分析得到：只要 T＞R＞P＞S，囚徒窘境的合作解与非合作纳什均衡解都不变化。

冯·诺伊曼和摩根斯坦的研究成果大部分涉及合作博弈，但是至今为止，与纳什、塞尔屯和海萨尼奠定基础的非合作博弈相比，合作博弈理论还非常不完善、不严格。

3.1.2.2　完全信息博弈与不完全信息博弈

上面的分析都假设两个局中人具有完全信息，即知道关于所有博弈局中人的可能策略、每种自己策略和对手策略组合分别给各人带来的“效益”以及所有博弈对手的特征等一切有关博弈决策的知识，但是实际中很少有这种理想情况。局中人通常必须在只有部分信息时就必须决策。这就是不完全信息博弈，这时决策就有相当风险，带有赌博性质，这正是我们每个人一生中都常常必须面对的。博弈论必须对此情况得出在一定假设下能够严格逻辑分析推理解决问题的方法。我们将在下面介绍。

3.1.2.3　静态博弈与动态博弈

上面囚徒窘境例子中的局中人必须同时决策，或者虽然不同时决策但是不知道对手的决策，类似于猜拳或“剪子、石头、布”。每个局中人必须依靠对所有策略组合及其效益的分析推理找出自己的最优策略。实际中也有另一种情况，例如下棋、打扑克、打乒乓球等，博弈是对手之间的一系列行为，每次博弈时，局中人可以而且必须根据对手的上一步策略决定自己的下一步策略，这就是动态

博弈。

3.1.2.4 博弈类型及其均衡

上述的三种分类可以构成四种非合作博弈类型,分别由纳什、塞尔屯和海萨尼提出了它们相应的均衡。可以用一个表格表示为

信息＼行动	静 态	动 态
完全信息	完全信息静态博弈 纳什均衡 （纳什 1950—1951）	完全信息静态博弈 子博弈精炼纳什均衡 （塞尔屯 1965）
不完全信息	不完全信息静态博弈 贝叶斯纳什均衡 （海萨尼 1967—1968）	不完全信息动态博弈 精炼贝叶斯纳什均衡 （塞尔屯等 1975—1991）

在以下四节中我们分别讨论这四种非合作博弈。

3.2 完全信息静态博弈与纳什均衡

由上面囚徒窘境博弈的例子大家已经了解什么是完全信息静态博弈与纳什均衡。这个例子中纳什均衡解对局中人是对称的。

囚徒窘境可以对应许多实际生活中的问题,例如可以提出“应试教育博弈”。一个家长知道自己的孩子学习负担太重,而且全部精力都用来反复练习比较古老、僵硬地设置的课程中的习题,不利于孩子创新素质的培养;如果减轻孩子的学习负担,设法鼓励他主动结合自己兴趣、范围宽广、形式多样的学习,孩子肯定会更快更好地成材。别的家长也具有同样的完全信息。然而,如果只有一个或少数家长给孩子“减负”,多数家长仍旧“增负”,在目前的考试制度下这些率先改革的家长们会立即得到惩罚,他们的子女将考不上学校或好学校,因此受不到更好的高一级教育,反而更不利于成材,而采取“增负”策略的家长会得到实惠。这样,如果把采取“增负”策略看作背叛,把采取“减负”策略看作合作,在当前考试制度和社会风气下会形成背叛的纳什均衡。每个家长都会分析,如果别人采取“增负”策略,那我更加必须采取“增负”策略,才有能力竞争;如果别人采取“减负”策略,那我也必须采取“增负”策略,就可以捷足先登。只有根本改变考试、入学、就业制度,形成新的社会风气,才可能在家长之间“达成有约束力的合作协议”,得到合作的纳什均衡。

另一个类似的例子是所谓的“见义勇为”博弈。当遇到危害公共安全(例如

公交车上的小偷)时,如果两个人都见义勇为(合作,简称C),可能每个人都受到小伤害(例如皮肉伤口),但是制止了所有人受到大伤害(被抢劫或重伤)的可能行为,这时两个见义勇为者的效益都设为-1;如果一个人(甲)见义勇为,另一个(乙)明哲保身(背叛,简称D),见义勇为者会受重伤,而且不能制服小偷,甲的效益设为-10,但乙因此没有受危害,他的效益设为0(没有受伤,也没有能防止以后的更大危害);如果两个人都明哲保身,则他们都受到大伤害(被抢劫或重伤),两个人的效益都设为-5。效益矩阵为

甲 乙	见义勇为	明哲保身
见义勇为	-1, -1	0, -10
明哲保身	-10, 0	-5, -5

与囚徒窘境完全类似,如果是合作博弈(即非常好的社会风气,每个人都相信别人一定也见义勇为(合作)),均衡解才是(-1, -1),在非合作博弈中,纳什均衡解是双方明哲保身(背叛),即(-5,-5)。

有另一类完全信息静态博弈,其纳什均衡解也对称,但不是背叛,而是合作。其中最著名的是所谓"铲雪博弈"(snowdrift game,简称SG)。若一条路上积有一大堆雪,使汽车根本不能通行,两个人驾汽车从两个方向对面开来,到雪堆前不得不停止。这时甲、乙两人的可能策略都只有铲雪(合作,简称C)和坐观人家的行动(背叛,简称D)。效益矩阵为

甲 乙	铲雪(合作)	坐观(背叛)
铲雪(合作)	1.5, 1.5(R)	1.0, 2 (S)
坐观(背叛)	2, 1.0 (T)	0,0 (P)

其中成功通过的效益设为2,单独铲雪花费的能量设为-1,合作铲雪花费的能量设为-0.5。由于每个人都具有完全信息,所以都可以判断如果自己背叛,另一人势必也背叛,得到P(0,0)解,大家都不能通行,所以不管是合作还是非合作博弈,都会自动趋向于合作的均衡解。(每个人都会分析:如果他铲,我就最好不铲,但是他肯定也这样想,所以这个好事不能实现。如果他坚决不铲,我就非铲不可。)这是天然选择合作的完全信息静态博弈对称纳什均衡解的最著名例子。类似于囚徒窘境,只要满足T>R>S>P,天然选择合作的对称纳什均衡解就不会定性变化。

完全信息静态博弈的不对称纳什均衡解的著名例子可以列举"智猪博弈"(boxed pigs)。有一个大猪和一个小猪同关在一个圈中。在猪圈一端有一个杠

杆，踩一下会在猪圈另一端的食槽中流出 3 kg 饲料。踩杠杆会消耗 0.25 kg 饲料。若小猪去踩，它跑到食槽前时，大猪已经吃完全部 3 kg 饲料。若大猪去踩，它跑到食槽前时，小猪只能吃完 2.5 kg 饲料，留下 0.5 kg 给大猪。若大、小猪一同去踩，它们同时跑到食槽前，大猪将吃 2 kg 饲料，小猪将吃 1 kg 饲料。两只猪的可能策略都只有两个：踩（合作，简称 C）和不踩（背叛，简称 D），效益矩阵为

大猪 / 小猪	踩	不踩
踩	1.75，0.75	3，－0.25
不踩	0.25，2.5	0，0

小猪的效益向量为：踩：(0.75，－0.25)，即若大猪也踩，盈余 0.75，若大猪不踩，亏损 0.25；不踩：(2.5，0)，即若大猪踩，盈余 2.5，若大猪也不踩，不盈不亏。

对比可得到：无论大猪如何，小猪不踩总是优策略（如果它踩，我最好不踩，可以吃 2.5 kg，还不用消耗；如果它不踩，我也只能不踩，反正都是吃不上，至少不用消耗）。由于大猪了解全部信息，所以它也知道小猪无论如何都不会去踩，因此它只能在“一同饿死”和“多踩几次，少吃一点”这两者之间选择。两害取其轻，大猪不得不踩。不对称纳什均衡解是：大猪踩，小猪不踩。

类似的例子还有“修路博弈”。一个山村有 20 户人家。其中 19 户是穷人，1 户是富人。富人倡议集资修路，每户出 1000 元，共 2 万元。路修成时，由于富人有资本运营，将受益每年 10 万元；穷人每户每年受益 2000 元。穷人都在考虑是否不出。若最后大家都不出，修路不成，受益都为零；若富人独出 2 万元修路，穷人都不出，由于路修好后不可能禁止同一个村子的人走，仍旧将会富人受益每年 10 万元；穷人每户每年受益 2000 元；若富人不出，穷人集资 19000 元，也可以勉强把路修好，也不可能禁止同一个村子的人走，仍旧将会富人受益每年 10 万元；穷人每户每年受益 2000 元。这样，每户都有出钱修（合作，简称 C）和不出（背叛，简称 D）两种策略，效益矩阵为

富人 / 穷人	出钱修	不出
出钱修	9.9，0.1	10，－0.1
不出	8，0.2	0，0

与上例类似，穷人“不出”在任何情况下都是优策略，因此无论如何都不出钱。富人有全部信息，了解这一点，他只能在“独资修路，大家使用”和“不修路，也不赚钱”两者之间选择，显然修路对他是优策略。不对称纳什均衡解是：富人独资

修路，穷人坐享其成。

通过这些例子，我们了解纳什均衡是博弈局中人在规则和对手情况限制下的优策略集合，是各人采取最大可能增加自己效益（或减轻自己损害）的决策形成的“僵局”，任何一方改变策略只会降低自己效益，或受到更大损害，因此在非合作、完全信息、静态条件下纳什均衡会自动达到且自动保持。对所有局中人，纳什均衡不一定是最合理、最优越的，也不一定对于所有局中人对称。在一些情况下，完全自私的局中人也可以形成合作的纳什均衡。这一点非常受到重视，被认为可能用来解释自然界中很多自私个体的合作行为。

3.3 完全信息动态博弈与子博弈精炼纳什均衡

3.3.1 子博弈精炼纳什均衡

3.3.1.1 子博弈

动态博弈就像下棋，要进行许多步。每一步中，局中人都要根据对手刚采取的策略进行决策，称为博弈的“一轮”。一轮博弈就称作一个“子博弈”。

对于完全信息动态博弈，所有已经发生过的、全部局中人的已采取策略、可能策略及其收益都是所有局中人共享的信息。

3.3.1.2 精炼

只有动态博弈的每个子博弈都达到纳什均衡，整个动态博弈才被称为达到了精炼纳什均衡。

动态博弈中常常会有博弈的一方提出“威胁”，即声称如果对方如何就要采取某种行动。这时受威胁的一方必须根据信息和分析判断这个威胁是否“可置信”。如果威胁者实施威胁会使自己遭受更大损失，威胁就“不可置信”；如果威胁者不实施威胁会使自己遭受更大损失，威胁就“可置信”。

只有去除了“不可置信威胁”之后达到的子博弈纳什均衡才是精炼的。

3.3.2 博弈树

由于动态博弈要进行许多步，所以前面介绍的效益矩阵方法只能描述一个子博弈，不能描述整个博弈过程。对整个博弈要引入“博弈树”方法，就是用一个类似树图的图形来描述动态博弈过程。下面用例子来说明。

3.3.3 例子

3.3.3.1 “市场进入阻挠”博弈

如果一个市场垄断企业的垄断利润为300；另一个打算进入这个市场的企

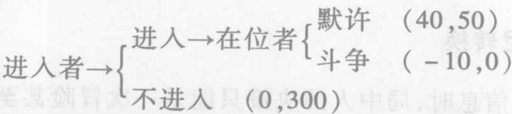
业进入市场的成本为10;如果成功进入,双方将平分市场,利润各为50;若垄断企业(在位者)选择降价竞争,阻挠后者进入,则会降到双方都无利润为止,即利润各为0。则一步效益矩阵为

在位者 进入者	默许(合作 C)	斗争(背叛,D)
进入(C)	50, 40	0, -10
不进入(D)	300, 0	300, 0

进入者效益向量:{进入 (40,-10)；不进入 (0,0)}

在位者效益向量:{默许 (50,300)；斗争 (0,300)}

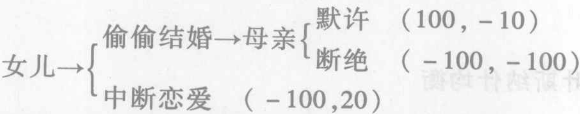
这是一个由两步子博弈构成的动态博弈。进入者首先要在进入和不进入两种策略之间抉择,但是他的决策显然必须考虑在位者的可能策略(是否实施降价竞争的威胁)。如果在位者选择斗争(实施威胁),则进入者效益为-10,即不赚钱反而白白消耗了广告费、试制费等代价,显然划不来;但是如果在位者选择默许(不实施威胁,即威胁不可置信),则进入者效益为40,是优策略。这个决策过程可以用下列博弈树来表示:



因此,进入者决策的关键在于判断在位者的威胁是否可置信。如果进入者有完全信息,他应该可以判断:如果他坚决进入,则在位者选择斗争会损失全部利润,而选择默许至少还能获得原来垄断利润的一部分,所以默许成为在位者的优策略,因此他的威胁是不可置信的,进入者应该坚决选择进入。最后达到的是对称的子博弈精炼(去除了不可置信威胁的)纳什均衡,即双方合作,瓜分市场。

3.3.3.2 "求婚"博弈

如果一个城市姑娘爱上一个农村出身的青年,她的守寡多年母亲威胁说:"你和他结婚就断绝母女关系!",则姑娘和母亲的决策可以用下面的博弈树来描述:



即女儿如果坚决与心上人结婚,则面临母亲是否实施威胁,如果威胁不可置信,母亲默许,则女儿很幸福,收益100,母亲会短暂地不愉快,收益-10;如果威

胁可置信，母亲与女儿断绝关系，则女儿和母亲都会终生不幸福，收益都是 -100；如果女儿中断恋爱，则自己长期不幸福（可能因为总是和想象中的幸福对比，因此再也找不到意中人），收益为 -100，而母亲看到女儿如此，她的高兴也十分短暂，收益为20。女儿决策的关键也在于判断母亲的威胁是否可以置信。如果女儿具有完全信息，她应该判断：如果她坚决与心上人结婚，母亲在面临默许与断绝的抉择时，默许只遭受短期的不愉快，而断绝则会遭受长期的不愉快，所以默许会成为母亲的优策略，她的威胁是不可置信的。女儿应该坚决与心上人结婚。得到收益不对称的子博弈精炼（去除了不可置信威胁的）纳什均衡，即结婚——默许。

3.4　不完全信息静态博弈与贝叶斯纳什均衡

实际中，局中人不可能具备完全信息，而且常常存在局中人具备信息的巨大差异。例如消费者和商人之间就是一场博弈，消费者力图用最低价格买到最高质量和最大数量的商品，而商人则相反。通常消费者很少有可能全面、仔细地调研、获取全部商家的所有信息（他们进货的渠道、质量、进价、销价的“底盘”等），而商人（尤其是大商家）常常花费了很大代价调查消费者的信息（类型、特征、当前流行的嗜好、心理等）。

3.4.1　海萨尼转换

在不具备完全信息时，局中人的决策只能是一次冒险甚至赌博，没有办法再像上述例子中那样完全理性地分析推断。例如上面的市场进入阻挠博弈和求婚博弈中，如果进入市场者不了解在位者的经济、管理、技术实力，不能判断它降价竞争，使自己无利可图之后，是否还可能得到利润；女儿面对一个性格难以捉摸的母亲，不能预料她以后的行为，就不能判断威胁是否可以置信。

这时可能做到的是：把所有局中人划分为若干个“类型”，设法知道每个类型局中人的所有可能策略及其相应效益，以及对手为某个类型的概率，然后依据这些知识进行决策。

这种研究观点和方法就称为海萨尼转换，它把一个非科学问题转化为包含了概率论之后的科学问题。这也是概率论进入博弈论的开始，无疑地，使博弈论更近于实际。

3.4.2　贝叶斯纳什均衡

贝叶斯纳什均衡就是在已知（包括自己的）全部局中人的类型概率分布情况下，分析得到的各个局中人最优策略组合。类似地，任一个局中人变化策略都

会导致损失，因此贝叶斯纳什均衡同样也会自然达到，也是会被自动遵守的僵局。

显然，通常贝叶斯纳什均衡依赖于一个概率阈值，如果某个局中人属于某个类型的概率低于此阈值，则贝叶斯纳什均衡不再成立。我们在下面用例子来说明。

3.4.3 例子

以上述的市场进入阻挠博弈为例，如果在位者可以被分为“高成本”和“低成本”两种类型，它们的一步效益矩阵分别为

高成本在位者

在位者 / 进入者	默许（合作，C）	斗争（背叛，D）
进入（C）	50，40	0，-10
不进入（D）	300，0	300，0

低成本在位者

在位者 / 进入者	默许（合作，C）	斗争（背叛，D）
进入（C）	100，30	140，-10
不进入（D）	400，0	400，0

可以看到，3.3 节讨论的市场进入阻挠博弈及其对称子博弈精炼纳什均衡仅仅适用于高成本在位者。如果在位企业属于低成本在位者，即规模很大，管理和技术先进，成本很低，垄断时利润更高（400），这时它即使默许进入者进入，也仍旧会占据大部分市场，即使降价竞争到进入者无利可图，在位者仍旧可以保持可观的利润（140）。那么在位者的威胁是可置信的，在位者的优策略是斗争，进入者的优策略是不进入。子博弈精炼纳什均衡变为不对称。

3.4.4 不完全信息贝叶斯纳什均衡

如果进入市场者不了解在位者的全部信息（经济、管理、技术实力等），只知道它属于高成本类型的概率为 x（当然属于低成本类型的概率为 $1-x$），则它进入市场的“期望利润”为：$40x+(-10)(1-x)$，不进入市场的“期望利润”为 0。容易计算得到：只有当 $x>0.2$ 时，进入市场的期望利润才大于不进入市场的期望利润，进入才是优策略。这样，最后的对称或不对称不完全信息贝叶斯纳什均衡解取决于 x 是否大于这个阈值，而且这个均衡解只能给出一个概率性的决策

结果预言。

3.5 不完全信息动态博弈与精炼贝叶斯纳什均衡

不完全信息动态博弈显然是我们迄今为止讨论的四种非合作博弈中最复杂的一种。这种情况下达到的精炼贝叶斯纳什均衡解及其求解过程一般也比较繁难。我们在本节中仅做很简单的介绍。

3.5.1 精炼贝叶斯纳什均衡

3.5.1.1 贝叶斯法则

3.4 节中已经讨论过,不完全信息问题中,局中人只能期望知道所有局中人的所有可能类型的完全信息,以及某个对手属于各个类型的概率,然后依据这些知识对自己决策做概率性预期的抉择。然而,如果博弈是动态的,即博弈各方都不断根据博弈法则和对手行为采取一系列的决策和行动,局中人就可能根据对手的一系列行为不断修正自己对某个对手属于各个类型的概率的推测,从而更准确地进行决策。

关于这种不断修正推测的著名贝叶斯法则可以表述为

某人做某事的概率(后验概率)=(某人做某事的先验概率(推测概率)×某类型人做某事的先验概率)/(各种类型人做某事的概率之和)。

可以根据此法则根据对手行为不断修正自己对于对手类型的先验判断。

3.5.1.2 精炼贝叶斯纳什均衡

当每个局中人都已经按照贝叶斯法则,根据实际对手行为修正了对其他人类型的判断之后,所有局中人采取的优策略组合就构成精炼贝叶斯纳什均衡。

3.5.2 例子:不完全信息动态囚徒窘境博弈

前面已经讨论过非合作的完全信息静态囚徒窘境博弈,在不允许两人达成有约束力的协议时,纳什均衡解是双方背叛(不合作),这并不是对双方都最有利的策略集合,然而,在假设的完全自私、完全理性、完全不合作的前提下,局中人不可能选择双方都最有利的最优策略。

这个著名的纳什均衡解符合实际吗?从 20 世纪 50 年代开始,进行过许多次实验:设置体现囚徒窘境博弈的表格,让参与者按照相应法则填写,选择策略。大量的实验结果证明,通常实验者并不按照博弈论假设的完全自私、完全理性、完全不合作原则行动,他们常常在一次博弈中找不到双方背叛的纳什均衡解;而在多次重复博弈时,会常常有一个人选择合作策略(学会合作),希望得到对手

的响应,但是也很难达到默契,找到双方合作的最优解。有人从大量的实验结果中总结出真正的人类在囚徒窘境这样的合作或背叛的选择博弈中至少可以分成三种类型[5]:

(1) 自利型:即与博弈论的假设相同,总是追求自己收益的最大化。

(2) 利他型:与博弈论的假设明显不同,注重所有人总收益(集体利益)的最大化。

(3) 超竞争型:追求自己收益与对手收益差额的最大化,即"追求相对优越性型"或"出风头型"。

基于这种理解,1982 年提出的 KMRW 声誉模型[7]解析求解了一类简化的非合作不完全信息动态囚徒窘境博弈问题,证明了在一定条件下可能达到双方合作的最优解。模型假设两个人(甲、乙)进行多次重复囚徒窘境博弈。他们只可能属于两种类型:理性或者非理性。理性者可以根据实际对手的行为修正对于对手类型的判断,然后采取最优策略。非理性者总是在一开始($t=0$)选择合作,而在以后总选择与对手上一步(刚结束的一轮博弈中)选择策略相同的策略(即所谓"针锋相对者",以眼还眼,以牙还牙)。甲可能是两个类型之一,他知道自己的类型,同时知道乙是理性的,但是乙只知道甲属于非理性的概率是 p,属于理性的概率是 $1-p$。博弈的每一轮结果是共同知识,观察到上一轮博弈结果后再进行下一轮博弈。

在第一轮,理性的乙应该进行一个不完全信息静态博弈。他分析:如果甲是理性的,则甲会选择背叛,如果甲是非理性的,则甲会选择合作,因此自己和甲的一步效益矩阵可以表示为:

乙 \ 甲	合作,C	背叛,D
C	1, 1	a, b
D	b, a	0, 0

这里为了方便解析,把效益作了归一化。容易得到:

若乙选择合作 C,他的期望收益为:$p(1+a)+(1-p)b$。

若乙选择背叛 D,他的期望收益为:pa。

乙在第一轮选择合作 C 的充要条件是:

$$p(1+a)+(1-p)b \geqslant pa,$$

$$\text{即 } p \geqslant -\frac{b}{1-b}。$$

也就是只有乙预估甲属于非理性的概率大于这个阈值时,他才会选择合作,以便得到双方的最大期望效益(双方抗拒)。

如果上式确实成立,即甲的确属于非理性,而乙也预判甲属于非理性,则第一轮结果就是双方合作(不坦白),这个结果是共同知识,所以乙立即知道甲的确属于非理性,从而可以准确预测甲下一轮仍旧会选择合作(针锋相对),因此乙会一直选择合作。双方合作的最优解会一直保持。如果上式不成立,甲属于非理性,但乙却预判甲属于理性,则第一轮结果就是甲合作(不坦白),但乙背叛(坦白),这个结果是共同知识,所以乙也立即知道甲属于非理性。只要乙知道甲的确属于非理性,总可以设计自己的策略组合(持续选择合作),引导双方达到合作最优解(即使甲也选择合作)。

如果甲属于理性,但乙却预判甲属于非理性,则第一轮结果就是甲背叛(坦白),但乙合作(不坦白),这个结果是共同知识,所以乙立即知道甲属于理性。因此乙仅仅在第一轮进行一个不完全信息静态博弈,以后双方都将进行完全信息博弈,但是由于乙对第一轮的效益只能估计期望值,所以双方以后的博弈效益仍旧需要做期望的估计,即使同为理性的甲和乙,也并不一定简单地根据完全信息静态囚徒窘境的纳什均衡解都采取背叛策略。

文献[4]简明地分析了双方在各种情况下对如此博弈 $T(T>3)$ 轮所得到效益的期望值,并且证明了:同为理性的甲和乙从博弈开始到 $T-2$ 轮全部选择合作的条件是

$$p \geqslant -\frac{b}{1-b},$$

$$p \geqslant \frac{a-1}{a},$$

$$a+b \leqslant 1。$$

本节不打算详细介绍证明的细节,有兴趣的读者可以参阅文献[4]。

3.6 合作博弈

合作博弈和非合作博弈的区别在于是否允许达成有约束力的协议,从而得到整体的最大效益。这里,出于博弈论对局中人完全理性、完全自私的基本假设,并不考虑实际中存在的利他型局中人。达成协议的需要及可能通常取决于博弈要达到的目的,以及外界(法律、道德等)的约束。例如,商品买卖双方的目的都在于达成交易,所以都致力于谈成一个"协议",因此交易博弈问题一般属于合作博弈。我们这里仅用著名的"自行车交易博弈"作为例子。

设甲有一辆自行车,但身无分文,他希望把自行车最少卖 80 美元;乙有 100 美元,但是没有自行车,原意最多花费 100 美元买一辆自行车。双方讨价还价,如果成交,假设价钱为二人原来假设值的平均值,即 90 美元,则一步效

益矩阵为

乙 \ 甲	给	不给
给	90, 110	170, 10
不给	0, 200	80, 100

矩阵的意义是(自左至右):当甲以90美元卖给乙(甲把自行车给乙,乙把90美元给甲)时,乙得到认为值100美元的自行车,还余10美元,所以收益为110美元,而甲收益90美元;当甲把自行车给乙,乙不给钱时,甲什么都没有了,收益为零,乙得到认为值100美元的自行车,还保留100美元,所以收益为200美元;当甲不把自行车给乙,乙却给甲90美元时,甲保留认为值80美元的自行车,还得到90美元,所以收益为170美元,乙只剩余10美元;如果两人都不给对方,甲保留认为值80美元的自行车,乙保留100美元。

如果看作非合作博弈,其纳什均衡解与囚徒窘境类似,即双方的优策略都是不给(每个人都想:如果他不给我,当然我也不能给他,否则吃大亏了;如果他给我,我也不能给他,这样就两样都有了。对于常识,这样想荒唐,但是请注意任何交易的想法就已经是合作博弈的思考)。然而,如果允许谈判并达成协议,则双方达成交易,都达到了比交易前更大的收益。这就是合作(结成联盟)。

许多社会科学家讨论过人类之间的合作(进而导致组织、社会等)是如何产生的[3]。英国哲学家霍布斯认为人类的原始状态,即刚从动物状态走出来时是完全自私的,社会、艺术、知识、工业等都完全没有产生的余地,人类的生活因而悲惨。人类的聚集和建立"契约"是为了摆脱悲惨境地的自然需求。弗洛伊德认为文明就是对人类本能的压抑。韦伯认为文明就是对人类贪欲的压抑。这些思想与合作博弈的思想一致,但是似乎还没有在传统博弈论中充分起作用,是一个值得继续研究的方向。

在下面还将继续讨论合作是如何产生的问题。

需要注意的是:尽管非合作博弈的成果看起来很严格,很完整,但是这与上面几节的介绍集中在博弈的均衡解上有关。然而,近年来许多科学家都认为:实际中达到均衡的情况很可能是罕见的,因此必须致力于研究非均衡的博弈问题。

3.7 演化网络博弈

上文提及,在人类社会和自然界中,自私个体之间产生合作是一个"惊人"的现象,得到了许多学者的重视与研究[8-11]。应用博弈论来解释合作的涌现在这些研究中占据了重要地位[12-16]。

3.7.1 演化网络博弈简介

既然要讨论合作的涌现，当然必须涉及相当数量的个体（局中人），而且合理地认为这些局中人以及他们之间的关系构成一个复杂网络，随着时间的演化每个局中人都在和他的邻居进行博弈。这就称为演化网络博弈。它的定义可以表述为：

（1）数量 $N \to \infty$ 的局中人位于一个复杂网络上。

（2）每个时间演化步，按照一定法则选取的一部分局中人以一定频率匹配进行博弈。

（3）局中人采取的对策可以按照一定法则更新，所有局中人的策略更新法则相同。这种法则称为“策略的策略”。然而，法则更新比博弈频率慢得多，使得局中人可以根据上一次更新对策成功与否选择、调整下一次的更新。

（4）局中人可以感知环境、吸取信息，然后根据自己的经验和信念，在策略更新法则下更新策略。

（5）策略更新法则可能受到局中人所在网络拓扑结构的影响。

通常用 $n = 1, \cdots, N$ 表示局中人，用 $S_n = \{e_{n1}, e_{n2}, \cdots, e_{nQ}\}$ 表示局中人的“策略空间”，用 $(s_1, \cdots, s_N)$ 表示 N 个局中人采取策略在策略空间中的一个“策略构形”，用 $u_n(s_1, \cdots, s_N)$ 表示此策略构形下第 n 个局中人的效益。这样，一个演化博弈可以表述为 $G = \{s_1, \cdots, s_N; u_1, \cdots, u_N\}$。

在演化网络博弈方向已经发表了大量论文，文献[17－27]仅提供一部分例子。特别值得注意的是扎巴（G. Szabóa）和法斯（G. Fáth）在2007年发表的关于演化网络博弈的长篇综述[28]，其中介绍、总结了近年来所有的重要研究成果。我们在本节有限的篇幅内仅能简介这个研究领域的两个重要方向。

首先，前面介绍过的囚徒窘境博弈和铲雪博弈是最著名的博弈模型。有大量的研究论文讨论了网络上发生的这两种博弈随时间的演化[13－28]。由于这两个博弈模型都是二局中人之间的博弈，上面介绍的演化博弈表示可以大大简化，采取前面几节中出现过的形式，而且博弈仅仅发生在节点和它的邻点之间。在研究中，大家注意的几乎都是合作如何涌现，以及合作的时空特征。我们将在下下一小节中简介中国科技大学课题组对这个研究方向的一点贡献，读者也可从中了解整个这个研究方向的基本问题和基本研究方法。

我们打算介绍的第二个研究方向是所谓“演化争当少数者博弈”。它讨论的是一种突破传统、在实践中取得很大成功的博弈模型在演化网络上的行为。中国科技大学课题组同样在这个研究方向作出了贡献。由于叙述顺序的需要，在3.7.2节中我们首先介绍第二个研究方向。

3.7.2 争当少数者博弈模型与演化争当少数者博弈模型

3.7.2.1 争当少数者博弈模型简介

查勒特(Challet)和张翼诚在 1997 年提出了描写经济行为的争当少数者博弈模型(minority game)[29,30]。模型可以简单地表述为:

(1) 数目为奇数 N 的局中人。每人只有 2 个可以选择的决策(A 或者 B),并且有 m 个比特的“记忆容量”,可以记忆可供决策考虑的信息。

(2) 每个演化时间步局中人必须同时决策,在 A 或者 B 中选 1 个。决策为少数者的局中人获胜,或者简单地说“少数者获胜”。

(3) 过去 m 次博弈的胜方记录是对所有局中人共享的信息。

(4) “策略”是局中人根据记忆信息,对下一时刻少数方决策(A 或者 B)的“预测”。容易证明,对给定的 m,有 $2m$ 种可能的共享信息,和 2^{2^m} 种不同的策略。

(5) 在每一轮博弈前,每个局中人根据记忆,从它选择的 s 个($s>1$)策略中,选择一个累计虚分最高的作为决策。这个虚分得到的方法是:在以前的每次博弈中,随机地从 2^{2^m} 种策略中抽出 s 个策略,假想地参加博弈后,若胜利则给此策略打正 1 虚分,若失败则给此策略打负 1 虚分。

争当少数者博弈模型的核心思想是少数者获胜。这是查勒特和张翼诚从实践中浓缩、提取的光辉思想。人类社会和生物世界中,许多有生命个体常常在竞争,以便获取更多的某种可分配成果。这些成果的总量常常是守恒或近似守恒的,而站在少数一边的竞争者就可以获取多数者们所有的一部分成果,成为竞争的获利者。股票交易可能是这种少数者获胜的最典型例子。除此之外,是否抓住新技术、新类型产业进入市场的机遇,选择何种职业等等也可能是少数者获胜的例子。

争当少数者博弈模型原则上不同于前面几节介绍的传统博弈模型。它并不是完全自私、完全理性且具有相当完整信息的局中人,按照严格的效益计算而决策,从而达到某种博弈的均衡。反之,我们看到争当少数者博弈模型中的局中人基本上是根据“成功的经验”(或“模仿成功者”)来决策的,并非理性,信息也远不完整。自然,也不存在争当少数者博弈模型的均衡。大家想一想,我们以及周围的人无时无刻不在面临抉择,有哪一次抉择是“完全理性”地、根据完全信息严格计算而决策的?又有哪一次决策是按照前面几节所述的均衡进行的?我们不得不同意,非理性、不完整信息的博弈更为重要。可惜的是,这类更普遍的博弈的理论还远不成熟。争当少数者博弈模型是这类博弈模型中十分突出的一个,至今已经得到几千篇著名刊物论文的引用与评价。

3.7.2.2 演化争当少数者博弈模型简介

约翰逊(Johnson)和许伯铭(P. M. Hui)等人1999年的论文把原始的争当少数者博弈模型改造为一个“局中人演化的争当少数者博弈模型”[31],这显然是更逼近实际情况的。模型可以简单地表述为:

(1) 数目为奇数N的局中人。每人只有2个可以选择的决策(A或者B),并且有m个比特的“记忆容量”,可以记忆可供决策考虑的信息。

(2) 每个演化时间步局中人必须同时决策,在A或者B中选1个。决策为少数者的局中人获胜,或者简单地说“少数者获胜”。

(3) 过去m次博弈的胜方记录是对所有局中人共享的信息。

(4) “策略”是局中人根据记忆信息,对下一时刻少数方决策(A或者B)的“预测”。容易证明,对给定的m,有$2m$种可能的共享信息,和2^{2^m}种不同的策略。

(5) 在每一轮博弈前,每个局中人根据记忆,在当前的m比特信息中选择胜出最多的策略作为决策(称为“基本决策”)。

以上各条与原始的争当少数者博弈模型相同,不同的是:给每个局中人赋一个p因子,使它每次博弈以p的概率使用基本决策,$1-p$的概率使用与基本决策正好相反的决策。如果$p=0$或者1,称为“极端博弈者”,如果$p=1/2$,称为“小心谨慎博弈者”。在演化的每一步,令最不成功的局中人(博弈积分的最低者)以一定方式(例如,以原来p因子为中心,在指定的Δp范围内随机选定),把它的p因子变化为一个新值,同时博弈积分重定为0。

这个模型的演化结果是局中人会自动分离为$p=0$或者1的极端博弈者群,说明小心谨慎博弈者常常效益最差。这个结果对于模型中各个参数的变化呈现了很大的鲁棒性。

此后,有许多继续研究争当少数者博弈模型的论文,其中包括中国科技大学课题组的工作[32,33],我们不再一一介绍。

3.7.3　基于历史记忆的铲雪博弈

部分受到争当少数者博弈模型的启发,中国科技大学课题组考虑到个体(人或者动物)的决策过程与记忆和经验密切相关,在2006提出了基于历史记忆的铲雪博弈模型(memory-based snowdrift game,简称MBSG)[26]。为了一般性,把铲雪博弈效益矩阵改写为:

乙 \ 甲	铲雪(合作,C)	坐观(背叛,D)
铲雪(合作,C)	1	$1-r$
坐观(背叛,D)	$1-r$	0

这样，铲雪博弈模型的收益可以用一个参数 r 来表示。

MBSG 模型可以简述如下[26]：

将 N 个个体放置于某种网络的节点上。每一轮，所有相互连接的个体同时按照前述的铲雪博弈模型进行博弈。个体总收益为：根据此收益矩阵计算结果与所有邻居博弈收益之和。当该轮博弈结束后，所有个体同时更新自身策略。个体会根据已知的邻居上一时刻的策略进行反思，即采用自己的反策略做一次虚拟的博弈，从而得到虚拟的总收益。然后将真实收益与虚拟收益进行比较，得到所对应的最佳策略，并将其记录到该个体的记忆中。那么每个个体记忆中所记录的都是历史时刻最佳的策略。

以上规则考虑到了人的有限记忆的特性，也就是人不可能记录以前发生的所有事情的信息，那么就需要记录最有用的信息。另一方面，人只能记录有限的时间段内所发生的事情，所以我们假设每个个体的记忆长度有限，长度为 M，即为从上一时刻到 M 时刻的历史最佳策略。然后每个个体根据自身的历史记忆进行决策。为了简单起见，我们采用多数者规则，即采用 C 或 D 策略的概率正比于 C 和 D 在记忆中的数量：$P_C = \frac{N_C}{N_C + N_D} = \frac{N_C}{M}$ 和 $P_D = 1 - P_C$。其中 N_C 和 N_D 分别是 C 和 D 的数量。然后所有个体更新记忆。重复以上步骤，系统就会演化下去。

3.7.3.1　二维网格上基于历史记忆的铲雪博弈行为[26]

衡量博弈系统最重要的物理量是合作频率 f_C，定义为合作者所占的比例。f_C 的值是在系统达到稳定以后对时间取平均得到的，它的值域从 0 到 1。1 对应全体合作态，而 0 对应合作消亡态。中国科技大学课题组首先根据模型模拟计算了二维周期边界条件下的 MBSG。网络规模为 10 000，初始 C 和 D 的比例各占 50%，在网络中随机分布。每个个体的初始记忆随机分配，中国科技大学课题组已经验证：初始的个体记忆对系统最终的稳定行为没有任何影响。MBSG 在 4 配位和 8 配位网格上的模拟结果分别显示在图 3.3 的(a)(b)两图中。在这两幅图中，我们注意到 4 个共同特点：(1) f_C 具有分段结构，分段个数对应节点的配位数；(2) 图像对于坐标点(0.5,0.5)呈 180°旋转对称；(3) 记忆长度 M 并不影响分段点 r_C 的值，但是对不同段 f_C 有很大影响；(4) 对于很大的收益参数 r，系统仍然表现出较高的合作水平。

4 配位二维网格上 f_C 受记忆长度 M 的影响显示在图 3.3(a)的插图中。因为在每一段中系统具有相同的合作水平，中国科技大学课题组简单地在每一段中选择一个 r 的值进行研究。对于 $0 < r < 0.25$ 和 $0.25 < r < 0.5$ 的两段区域，f_C 是 M 的单调函数，并且第一段区域中 f_C 的下降速度快于第二段区域。相反，对于 8 配位二维网格，f_C 表现出了非单调的行为，如图 3.3(b)中插图所示。在第

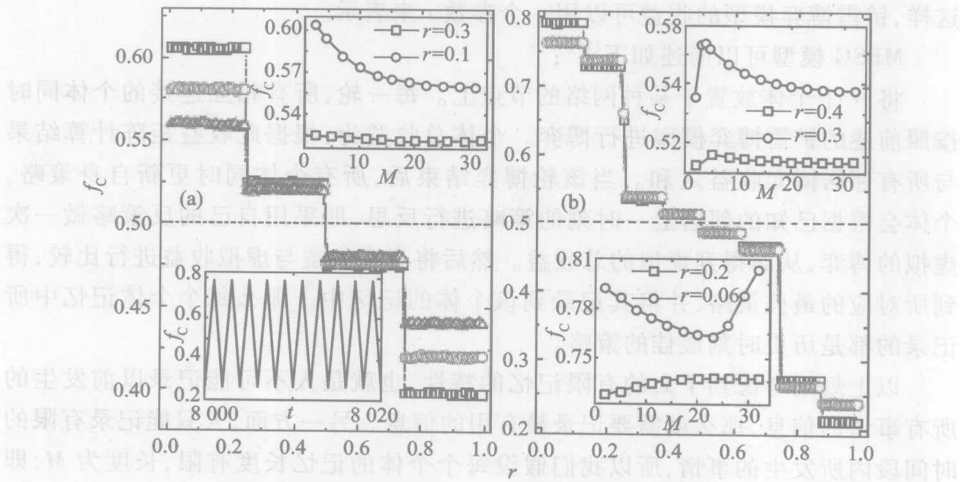


图 3.3 四邻居和八邻居二维网格上合作水平 f_C 与博弈模型参数 r 的函数关系(引自文献[26])

插图中为合作水平与历史记忆长度的相关性以及在历史长度为1时的演化行为

一段区域存在一个最低的 f_C 值,对应于 $M=23$。在第二段区域,f_C 是一个单调的增函数。在第三、四段区域存在最大值的 f_C,对应于 $M=5$,显示在图 3.3(b)的插图中。所以 M 对 f_C 起非常复杂的作用,表现为不同区域截然不同的行为。值得强调的是,在 $M=1$ 的时候,系统中的合作行为表现出了大的震荡,如图 3.3(a)的插图所示。这种不稳定性为将会在后文中通过空间斑图进行解释。

中国科技大学课题组给出了一种启发式的局域稳定性方法来分析分段点 r_c 的值。当 $r=r_c$ 时,某一个体采用 C 策略和 D 策略所获得的收益相同。假设一个节点的采用策略 C 的邻居个数为 m,那么对于 K 配位的网格,策略 D 的邻居数为 $K-m$。因此可以得到局域稳定性方程:$m+(K-m)(1-r_c)=(1+r_c)m$,其中左侧表达式表示这个节点采用 C 策略的收益,右侧相应表示采用 D 策略时的收益。这个公式得到结果 $r_c=(K-m)/K$。在 4 配位的情况下考虑所有可能的 m 值,我们得到了 r_c 的值分别为 0.25,0.5 和 0.75。类似的,可以得到 8 配位 r_c 的值,分别为 1/8,2/8,…,7/8。这些分析结果与模拟结果完全符合。

为了得到对系统演化更直观的理解,中国科技大学课题组在二维网格上研究了空间斑图的演化。图 3.4 显示了 4 配位网格上的两种典型的空间斑图。这些斑图是统计上稳定的,并且与系统初始状态无关。这两种斑图分别对应于区域 $0<r<0.25$ 和 $0.25<r<0.5$。这些斑图的形成同样可以通过局域稳定性分析进行解释。如图 3.4(c)所示,中国科技大学课题组列出了在第一段区域所存在的局域斑图,并且计算了中心个体选择 C 和 D 策略的收益对比,W_C/W_D。从收益对比可以看出第三个局域斑图是最稳定的,因为具有最大的收益比。同时,

第四个斑图与第三个相匹配，所以也非常稳定。这就解释了为什么图 3.4(a)具有国际象棋棋盘状的本底以及由一些 C 组成的线构成的斑图。类似的，图 3.4(b)中的棋盘状本底也是由于第四和第五个局部斑图具有最高的稳定性导致的，并且其他局域斑图出现的次数与它们的收益比例呈正比。然后研究的 8 配位网格上的空间斑图中，同样在每一段区域都存在一种特定的空间斑图，并且 $r<0.5$ 和 $r>0.5$ 的区域斑图中黑白反色。对于第一和第二段区域，D 占少数，淹没在 C 的海洋中。在第三和第四段，有趣的空间斑图产生了。如图 3.5(a)所显示，D 的位置构成了很多条带状结构，并且被 C 包围。图 3.5(b)对应于 $0.375<r<0.5$ 的区域，斑图为迷宫状，这时 C 的数量略为多于 D。这些斑图的形成同样可以通过局域斑图的稳定性分析进行解释。

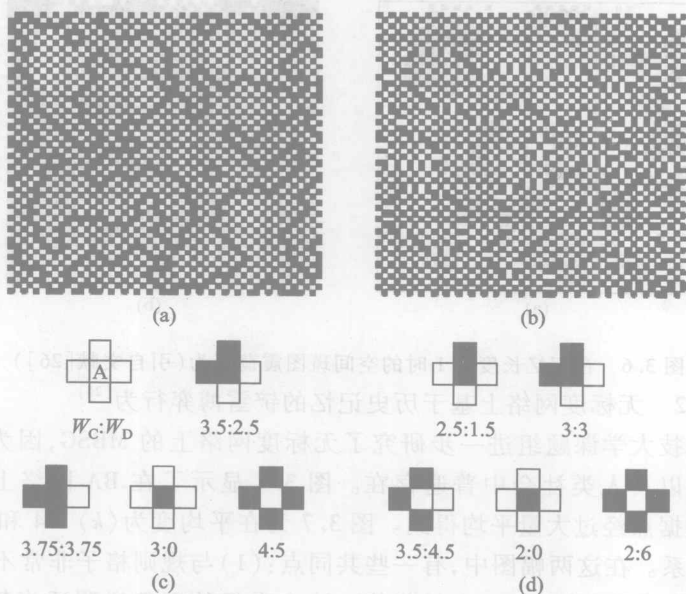


图 3.4 四邻居二维网格上的空间斑图，以及局域斑图稳定性示意图(引自文献[26])

下一步讨论 $M=1$ 时的空间斑图特性。在这种情况下，空间斑图是不稳定的，显示为 f_C 的大震荡。图 3.6 显示了在 $M=1$ 时的两种典型斑图。很大一部分相连的合作者在下一时刻同时转变为背叛者。正是这种大规模的个体状态转变导致了体统合作水平的大震荡。在这个转变区域，某一时刻个体具有相同的策略。那么下一时刻个体都会倾向于采取自己的反策略，这样能够得到更大的收益(由于个体只知道上一时刻周围邻居的策略)。所以就会产生这种大规模剧烈的策略转变，进而产生合作频率的大震荡。一旦这种震荡产生，将会永远持续下去。

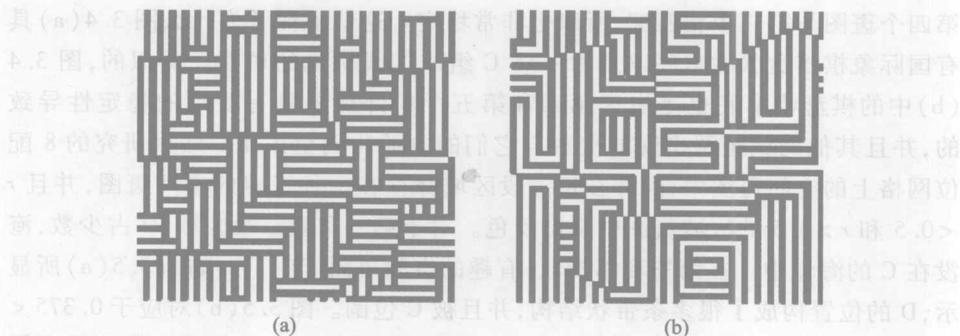


图 3.5 八邻居二维网格上的空间斑图(引自文献[26])

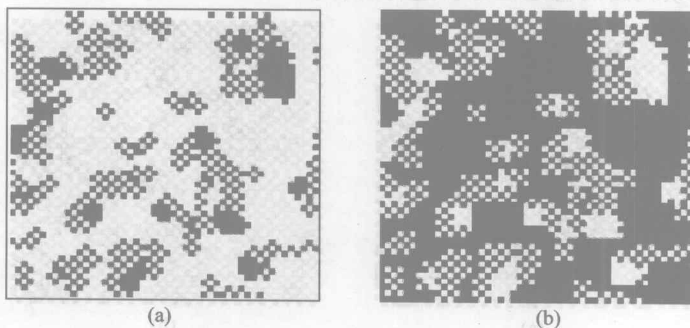


图 3.6 在记忆长度为 1 时的空间斑图震荡行为(引自文献[26])

3.7.3.2 无标度网络上基于历史记忆的铲雪博弈行为[26]

中国科技大学课题组进一步研究了无标度网络上的 MBSG,因为无标度网络在自然界以及人类社会中普遍存在。图 3.7 显示了在 BA 网络上的模拟结果。每个数据点经过大量平均得到。图 3.7 为在平均度为$\langle k\rangle=4$ 和$\langle k\rangle=8$ 时 f_C 与 r 的关系。在这两幅图中,有一些共同点:(1)与规则格子非常不同的是,f_C 是 r 的非单调函数,并存在一个最优值。这个有趣的现象说明适当鼓励自私的行为反而能够更好地促进合作;(2)与规则格子上的情况相同,f_C 曲线的连续性被一些突然的增加打断。连续段的数目对应于平均度;(3)两幅图都以坐标点(0.5, 0.5)为 180°旋转对称;(4)记忆长度 M 不影响不连续点 r 的值,而只影响 f_C 的值。中国科技大学课题组进一步细致研究了 M 如何影响 f_C,发现存在一段特殊的区域,在这段区域 M 对 f_C 起不同的作用。

对于$\langle k\rangle=4$ 的情况,这段特殊区域从 $r=0.34$ 到 0.49,如图 3.7(a1)所示。在这段区域,f_C 与 r 的函数关系显示在图 3.7(b1)中。对于 $r=0.42$,f_C 不依赖于 M。对于 $0.34<r<0.42$,f_C 是 M 的减函数;而对于 $0.42<r<0.49$,f_C 却变成了 M 的增函数。类似的现象同样出现在平均度为 8 的 BA 网络中,如图 3.7(a2)所示。$r=0.45$ 是分界点,对于 $r<0.45$ 和 $r>0.45$ 的情况,当 M 增加的时

候，f_C 表现为减少和增加。当 $M=1$ 时，系统同样存在大震荡，如图 3.7(a2) 中插图所示。这同样是由于很大一部分个体策略同时转变造成的。

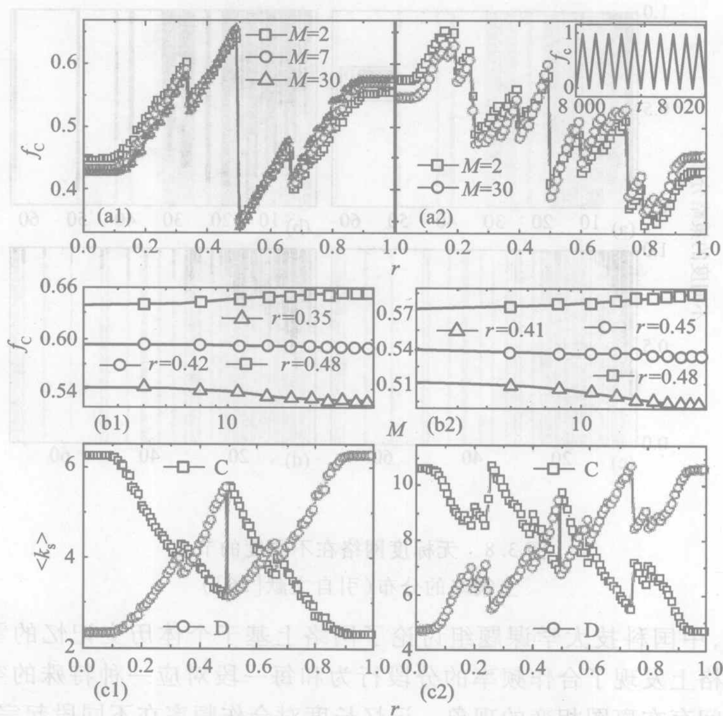


图 3.7　无标度网络上的合作行为与博弈参数的函数关系，在交叉点处合作水平与记忆长度的关系以及不同策略个体所占据的节点平均度和博弈参数的关系（引自文献[26]）

为了解释无标度网络上的非单调现象，中国科技大学课题组研究了合作者和背叛者所占据的平均度 $\langle k\rangle$ 与 r 的关系。在图 3.7(c1)(c2) 中，D 的，$\langle k_s\rangle$ 随 r 的变化趋势与 f_C 相同，并且跳变点的位置也相同。对于节点占据情况更加细致的描述显示在图 3.8 中。对于 $\langle k\rangle=4$，当 f_C 值很低的时候，所有度大的节点都被合作者所占据，大部分度小节点被欺骗者占据；当 f_C 达到最高值时，大部分度大节点上的 C 被 D 所取代，并且在度小节点上 C 占据了大多数。在 $\langle k\rangle=8$ 时，也存在相同的现象。注意到在无标度网络中，度大节点占少数，而且，度小节点的大部分邻居是度大的节点。因此，当越来越多的度大的节点被 D 占据的时候，越来越多的度小的节点上的个体被迫选 C 来从它们的邻居那里获得 $1-r$ 的收益。那么正是这种度小的节点上个体的被动选择导致了系统中合作频

率的增加。然而,当 r 变得很大的时候,C 非常低的收益导致系统中绝大多数个体背叛的行为。因此,在中间某一个 r 的值使得系统中合作频率最大化。

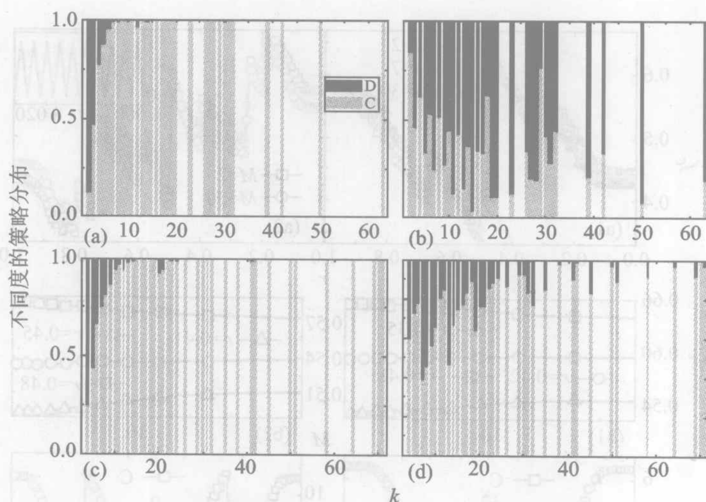


图 3.8 无标度网络在不同度的节点上策略的分布(引自文献[26])

综上,中国科技大学课题组讨论了网络上基于个体历史记忆的雪堆模型。在规则网格上发现了合作频率的分段行为和每一段对应一种特殊的空间斑图。不同段之间存在斑图相变的现象。记忆长度对合作频率在不同段起完全不同的作用。有趣的是,在无标度网络上观察到了非单调的行为。通过不同策略个体所占据节点的拓扑信息,解释了这种非单调现象产生的原因。我们的新模型将会引起演化博弈研究领域的学者的关注。

3.8 城市公交网络的网络操纵者博弈模型

我们通过本章的介绍看到,如果考虑局中人的不同类型,完全自私的局中人就可能选择合作。上面又介绍了在整个大型网络上分布的完全自私的局中人如何大面积地选择合作。这些题目长久地吸引许多领域内科学家的注意力,这是由于合作就是组织、秩序、社会的开始和基础。

在介绍了演化网络博弈及其重要性之后,我们也许可以提醒大家注意演化网络博弈的局限性。在相当一些重要的实际网络中,节点表示的基本单元不具有自主性,因此不能作为博弈的局中人。公共交通网络可能是一个不错的例子。这里的节点一般定义为公交车站,它们是由人类的某个组织建造和管理,来为特

定地区的群体服务的,不能被认为具有为了最大化自身利益而选择策略的博弈能力。然而,这里并非没有博弈问题。建造、管理车站和公交线路的组织必须受到其他有关组织或部门,以及乘客群体的约束,并不能为所欲为。这三个方面可以代表性地被命名为:公交公司、政府的公共交通管理部门以及乘客。他们当然在合作,只要有一方退出博弈(游戏),公交系统就会瘫痪;然而他们之间显然存在利益的矛盾。公交公司很可能更加关心运营的利润(或者政府补贴和亏损)的多少,以便改善自身(包括它的全体员工)的收益;政府交管部门很可能更加关心道路使用的效率和公共安全;乘客(虽然一般没有组织,但是常常会以各种形式表达自己统一的、不能被忽视的意见)很可能更关心乘坐公交旅行的方便性和票价。可以合理地假设这三方也是完全"自私"(只关心自己上述的利益)的局中人,在为最大化自身利益而选择策略进行博弈。他们不是网络的节点,然而可以被看做"网络的操纵者"。这种网络操纵者博弈很可能是一个新类型,而且可能描述相当一些实际系统的行为。

扬州大学课题组很可能是首先提出网络操纵者博弈这种设想的群体,并且把上述的公交网络操纵者博弈模型的数值解与国内一些城市的实证数据作了对比[34]。他们建议一个"三方轮流坐庄"的公交网络操纵者博弈演化模型。在开始时,有 n_0 个车站,每个有表征此处平均旅客数的点权 a。如果两个车站在至少一条公交线路上,它们被一条边连接。边权 b 表征这些线路的"繁忙程度"或者线路通过道路的"堵塞程度"。每个时间步有 m 个新车站加入网络,然后按照下列法则演化:(1)随机选择一个车站作为起点;(2)按照(下面将解释的)某一个网络操纵者的建线法则依次选择后面的车站,建成一条新线路;(3)在 $t=0$ 时,首先按照政府交管部门的建线法则建设 g 条通过 n_0 个车站的线路,此后,为了体现三方都认识的"三方必须合作"的原则,每一步演化结束(建了一条新线)后,就按照(下面将解释的)各个网络操纵者效益定义计算三方各自的效益,然后采取各方所占总效益比例的倒数,作为下一次建新线时采取它的建线法则的概率,也就是说,在上一条线路建好后谁最吃亏,下一次就首先照顾它的利益,以便维持合作;(4)每一条新线路建成后,点权 a 和边权 b 按照以下公式演化:

$$a(i,t+1) = a(i,t) \times \left[1 - k(i,t) \Big/ \sum_{i=1}^{N} k(i,t)\right],$$

$$b(i,j,t+1) = b(i,j,t) \times \left[1 + l(i,j,t) \Big/ \sum_{i,j=1}^{N} l(i,j,t)\right],$$

其中 k 表示车站的度,即不计算重复的从本站可以直达(不转车)的其他公交站数,l 表示计算重复的从本站可以直达(不转车)的其他公交站数,说明建设新线会吸引更多的旅客,但增加道路的拥挤。

三方的建线法则定义为:(1)公交公司:选择每个下一站使 $a/(lh)$ 最大,这

里a表示车站平均旅客数,h表示本站停靠的所有公交线路数,说明公司希望线路连接乘客最多,停靠车次和可直达车站最少的车站,以便获得最多的车票收入;(2)乘客:选择每个下一站使$a/(lh)$最小,说明乘客希望线路连接乘客最少,停靠车次和可直达车站最多的车站,以便最舒服地乘车,而且花费最少的票价;(3)政府交管部门:选择每个下一站使alh最小,说明政府交管部门希望线路连接乘客、停靠车次和可直达车站都最小的车站,以便整个公交系统和相关道路系统都最少拥挤,最安全地运行。

三方的收益定义为:(1)公交公司:$\overline{a}\overline{s}/\overline{T}$,其中$\overline{a}$表示网络平均点权(平均乘客数),$\overline{s}$表示网络平均转车次数,$\overline{T}$表示网络平均每线路包含车站数,即平均乘客和换乘次数越多,停靠车站越少,公司效益越好;(2)乘客:$\overline{h}/\overline{s}$,其中$\overline{h}$表示网络平均每站停靠公交线路数,$\overline{s}$表示网络平均转车次数,说明每站可乘的线路越多,平均转车次数越少,乘客效益越好;(3)政府交管部门:$1/(\overline{a}\,\overline{s}\,\overline{h})$,说明政府交管部门希望每站平均等候旅客、换乘次数和每站停靠公交线路数都越少越好,以便运行最安全、最少堵塞。

图3.9显示了由公交网络操纵者博弈演化模型数值模拟得到的三方效益演化图,可以看出三方的效益经过博弈逐渐趋于一致,此后每次建新线采取每一方建线法则的概率相同,网络操纵者博弈将达到一个均衡。文献[34]报道了达到均衡后的模型网络的一些重要统计性质的模拟结果,并与2003年北京公交网络的相应实证结果的对比,说明模型比较好地描述了实际网络的演化。

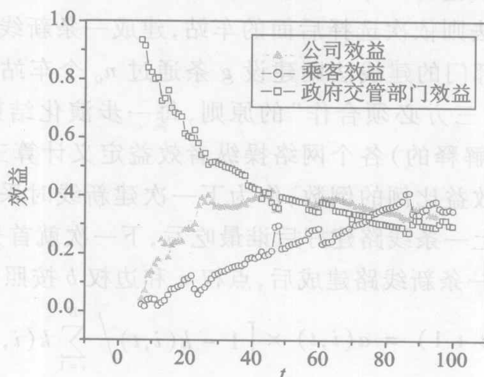


图3.9 由公交网络操纵者博弈演化模型数值模拟得到的三方效益演化图(引自文献[34])

第三章参考文献

[1] 张维迎．博弈论与信息经济学．上海:上海人民出版社,1996.
[2] 施锡铨．博弈论．上海:上海财经大学出版社,2000.
[3] 潘天群．博弈生存:社会现象的博弈论解读．北京:中央编译出版社,2004.
[4] 于维生,朴正爱．博弈论及其在经济管理中的应用．北京:清华大学出版社,2005.
[5] 罗杰·麦凯恩．博弈论:战略分析入门．原毅军,陈艳莹,张国峰,等,译．北京:机械工业出版社,2006.
[6] 冯·诺伊曼,摩根斯坦．博弈论与经济行为．王文玉,王宇,译．北京:生活·读书·新知三联书店,2004.（译自 Oskar Morgenstern, John Von Neumann. Theory of Games and Economic Behavior. Oxford University Press. 2nd ed. 1947.）
[7] D. Kreps, P. Milgrom, J. Roberts and R. Wilson, J. Economic Theory, 27 (1982) 245.
[8] Sugden R. The Economics of Rights, Cooperation and Welfare. Blackwell: Oxford, U. K. ,1986.
[9] Hammerstein P. Genetic and Cultural Evolution of Cooperation. Cambridge: MIT, MA,2003.
[10] Sigmund K. Games of Life. Oxford: Oxford University Press,1993.
[11] Axelrod R. The Evolution of Cooperation. New York: Basic books,1984.
[12] Gintis H. Game Theory Evolving. Princeton:Princeton University,2000.
[13] M. Nowak and K. Sigmund, Nature (London) ,355 (1992) 250 .
[14] M. Nowak and K. Sigmund, Nature (London) ,364 (1993) 56.
[15] M. Nowak and R. M. May, Nature (London), 359 (1992) 826.
[16] M. Nowak and R. M. May, Int. J. Bifurcation Chaos, 3 (1993) 35.
[17] G. Abramson and M. Kuperman, Phys. Rev. E(R), 63 (2001) 030901.
[18] B. J. Kim, A. Trusina, P. Holme, P. Minnhagen, J. S. Chung and M. Y. Choi, Phys. Rev. E, 66 (2002) 021907.
[19] H. Ebel and S. Bornholdt, Phys. Rev. E, 66 (2002) 056118.
[20] G. Szabóa and C. Hauert, Phys. Rev. E, 66 (2002) 062903.
[21] G. Szabóa and J. Vukov, Phys. Rev. E, 69 (2004) 036107.
[22] J. Vukov and G. Szabóa, Phys. Rev. E, 71 (2005) 036133.
[23] C. Hauert and G. Szabóa, Am. J. Phys. , 73 (2005) 405.
[24] Z. X. Wu, X. J. Xu, Y. Chen and Y. H. Wang, Phys. Rev. E, 71 (2005) 037103.
[25] F. C. Santos and J. M. Pacheco, Phys. Rev. Lett. , 95 (2005) 098104.
[26] W. X. Wang, J. Ren, G. Chen and B. H. Wang, Phys. Rev. E, 74 (2006) 056113.
[27] W. X. Wang, J. Lü, G. Chen and P. M. Hui, Phys. Rev. E, 77 (2008) 046109.
[28] G. Szabóa and G. Fáth, Physics Reports, 446 (4 - 6) (2007) 97.
[29] D. Challet and Y. C. Zhang, Physica A, 246 (1997) 407.

[30] D. Challet and Y. C. Zhang, Physica A, 256 (1997) 514.

[31] N. F. Johnson, P. M. Hui, R. Jonson and T. S. Lo, Phys. Rev. Lett., 82 (1999) 3360.

[32] K. Chen, B. H. Wang and B. Yuan, Phys. Rev. E (R), 69 (2004) 025102.

[33] K. Chen, B. H. Wang and B. Yuan, Inter. J. Modern Phys. B, 18(17-19)(2004)2387.

[34] B. B. Su, H. Chang, Y. Z. Chen and D. R. He, Physica A, 379 (2007) 291.

第四章　数理统计简介

物理学和一切科学的发展历史告诉我们:知识、理论来自实践。人类总是先在实践中积累了相当多的观测数据和结论,然后就有人从数据处理中提取出浅层的规律,最后则是某些天才的思想家依据这些浅层规律实现认识的飞跃,发现埋藏在观测结果深处的普遍自然法则。因此,任何科学领域的发展必须从实践开始。目前的网络研究也不例外,一些最著名、得到普遍认可的研究论文都以大量的实证调研结果来支持自己的创新观点。离开实际,再精彩的思想也是无源之水、无木之舟。

网络的实证研究包括搜集数据、处理数据、从不可避免地包含噪声与统计涨落的数据中提取统计规律。数学家们在“数理统计”这个分支学科中已经给我们准备好了许多严格的、非常有用的科学结论[1-5]。本书在此做一个十分简略的介绍是必要的。

4.1　一些基本概念

物理系学生学习物理实验课程时,第一课常常是讲授误差和有效数字的知识。由于实验方法和实验装置精度的限制,而且各种影响测量结果的偶然因素和外界干扰也不可避免,任何实验测量的数据序列一定存在与我们寻求的实验结果“真值”之间的误差。在进行开创性的实验探索的时候,没有人知道什么是待寻求的真值,正确的实验结果只有依靠一些用正确理论武装起来的头脑对实验结果进行加工才能得到。因此如何得到数据,如何处理数据是至关紧要的。在一定意义上,任何一个在理论上可以认为是“确定”的物理量的多次测量数据序列都可以认为是一个“随机变量”,只不过随着实验方法的不断改善和实验装置精度的不断提高,这个随机变量的变化范围也会不断缩小。

在当前的大规模复杂网络的实证调研中,客观规律往往隐藏在大量统计数据中。不但各种偶然因素和外界干扰起着更大的作用,而且各个被测量的个体本身就存在各种各样的差异。因此正确处理数据的方法就更重要。这些统计量在理论上也不能被认为是“确定”的,是不折不扣的随机变量。

本书只能对数理统计知识中最使我们感兴趣的一小部分内容做最简短的介绍。在此之前,本节首先简述一些大家可能已经熟知的概念。

4.1.1 统计学的一些重要概念

4.1.1.1 统计总体和统计样本

统计总体是待统计研究对象的全体;统计样本是由于受到条件限制,因而在总体中按照一定原则选取的一部分个体。我们当然希望对样本统计所得到的被测随机变量(代表待研究的对象的某种性质)取值分布能代表总体,也就是希望对样本统计与对全体统计的结果相同。同时,希望样本中各个个体的选取完全独立,对它们的测量值互不影响。满足这两条的样本称为“简单随机样本”。本章主要讨论这种样本。

4.1.1.2 统计数据的描述量

1. **均值**:$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$,其中 x_i 是“样本数据”(观测值),N 是“样本大小”(数据个数)。均值就是所有观测值的算术平均值。

2. **中位数**:$M = x_{(k+1)}$ 若 $N = 2k + 1$;$M = \frac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2}$ 若 $N = 2k$。中位数是使得变量取值落在它两边的概率相同的点。

当有“离群测量值”时,均值受到较大影响,而中位数不受影响,可以以中位数为准,两端各截去若干数据,然后求均值,所得到的称为“截尾均值”。类似地也可以研究“截尾分布”。

3. **模(最可几值)**:即出现概率最大的数据。如果数据出现概率分布是单峰的,模就是峰值。对称单峰测量值分布的均值、模与中位数都相同。

4. **极差(数据取值范围)**:$R = x_{max} - x_{min}$。它同样容易受到离群测量值的影响。为此有时运用所谓的“四分位点间距”,即把所有数据按照大小排列,两端各去掉1/4数据后,余下的中间的一半数据的极差。

4.1.2 概率论的一些重要概念

1. **概率(数据出现频率)**:$P(x) = n(x)/N$,其中 $n(x)$ 是取值为 x 的数据个数。

2. **分级出现概率(相对频率)**:许多实际情况中,对于一个 x,只存在一个这样的数据,即 $n(x)$ 总等于1。这时常常运用分级出现概率(相对频率):$P(x) = n(x)/N$,其中 $n(x)$ 是取值在 $x \pm \Delta x$ 范围内的数据个数。这样做的好处是避免了 $P(x)$ 分布描述中的平庸性,而且在一定程度上会减小统计涨落,一般可期望再现接近真实的分布;坏处是大大减少了数据量,如果本来就是小样本,数据量的减少可能导致统计结果可信程度的大幅度降低,而且 $x \pm \Delta x$ 范围大小的选择一般提不出客观的标准,使得统计结果的客观性受到质疑。

3. **累计出现概率(累计频率)**:把所有数据按照大小排列后,计算 $P(x_i) = [\sum_{j=1}^{i} n(x_j)]/N$ 作为 x_i 的累计出现概率(累计频率)。这样做的好处是:不但避免了 $P(x)$ 分布描述中的平庸性,也并不减少数据量,而且累计后的每个数据一般都包含了许多原来的数据,因此会在(我们已知的)最大程度上减小统计涨落;坏处是:原来的、我们希望知道的 $P(x)$ 分布的函数形式与累计的 $P(x_i) = P(x_j \leqslant x_i) = [\sum_{j=1}^{i} n(x_j)]/N$ 分布一般并不相同,因此必须解析地推导这两个分布函数形式之间的定量关系。

也可以考虑不同的累计方法。著名的 Pareto 分布是从统计人们收入的分布开始的[6]。这时不好问具有某一个精确收入数字的人数(可能非常少)是多少,而是自然地问大于某一个精确收入数字的人数是多少,也就是定义累计出现概率为:$P(x_i) = P(x_j \geqslant x_i) = [\sum_{j=i}^{N} n(x_j)]/N$。这样定义的好处和坏处与上面所述定义是类似的。

4. **条件概率**:$P(B|A) = P(AB)/P(A)$,其中 $P(B|A)$ 表示在随机事件 A 发生的条件下,随机事件 B 发生的概率,$P(AB)$ 表示随机事件 A 和随机事件 B 共同发生的概率,$P(A)(>0)$ 表示随机事件 A 发生的概率。

4.1.3 关于随机变量的一些重要概念

1. **随机变量的数学期望**:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i p(X = x_i),$$

其中 X 为随机变量,x_i 是 X 的一个取值,$p(X = x_i)$ 表示 X 取 x_i 的概率。

2. **随机变量的方差**:

$$\sigma(X)^2 = \sum_{i=1}^{N} [x_i - E(X)]^2 p(X = x_i) = E[X - E(X)]^2$$
$$= E(X^2) - [E(X)]^2.$$

3. **随机变量的标准差**:

$$\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} [x_i - E(X)]^2 p(X = x_i)} = \sqrt{E(X - E(X))^2}。$$

4. **两个随机变量的协方差**:搜集数据、处理数据、从数据中提取统计规律,一般都是为了找到描述两个相关变化的随机变量(本书不讨论更多变量的复杂情况)之间统计关系的函数。寻求一个随机变量取值的分布函数可以看作这类问题的一个特例,这是因为随机变量取值的分布函数也可以被看做关联于随机变量本身的另一个随机变量。对于两个相关变化的随机变量,可以定义协方差:

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$。

5. **两个随机变量的相关系数：**

$$\rho(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y)/[\sigma(X)\sigma(Y)]$$。

若变量 X,Y 互相独立，相关系数为零；若一个增大，另一个也增大，相关系数大于零（正相关）；若一个增大，另一个减小，相关系数小于零（负相关）。

显然有：$-1 \leqslant \rho(X,Y) \leqslant 1$，如果可以近似地认为变量 X,Y 线性相关，它的数值大小标志线性相关的良好程度（数据线性拟合的良好程度）。当 $\rho(X,Y) = 1$ 时，为完全线性正相关（两个变量的取值都压在斜率为正的拟合直线上）；当 $\rho(X,Y) = -1$ 时，为完全线性负相关（两个变量的取值都压在斜率为负的拟合直线上）；当 $\rho(X,Y) = 0$ 时，为完全不相关（两个变量的取值随机分布，完全不能线性拟合）。

4.2 统计假设及其检验

4.1 节已经说过，本书的讨论集中在搜集数据，然后致力于处理数据，以便找到描述两个随机变量之间统计关系函数的问题上。我们认为：寻求一个随机变量取值的分布函数可以看作这类问题的一个特例，这是因为随机变量取值的分布函数也可以被看做关联于随机变量本身的另一个随机变量。

初学者常常带着一个先入为主的思想框架，轻易地就决定用某个函数去拟合数据，而且在拟合并不好的情况下，也牵强附会地做出肯定的结论，得到一个距离实际有相当差距的拟合函数关系。例如在 1999 年著名的 BA 模型在 Science 上发表之后，许多人追随发表了不少实际系统中度分布为幂函数的实证研究报告。其中有相当一些，得出的结论是大可怀疑的。他们在双对数坐标平面上明显构成光滑曲线的数据中选取看起来比较“像”直线（这强烈依赖于图的画法以及个人的感觉）的一部分，然后就依据这部分画一条直线，作为幂律度分布和相应的标度因子估计的依据。要知道一个光滑曲线的任何一个够小的部分都可以用一段直线来逼近，但是又永远不能与一段直线精确重合，这是微积分的基本知识。这样做违反了数学和统计学的基本原则，也违反了实践出真知的认识原则。

统计学的一个基本原则是：即使搜集了合理的数据样本，具备了关于研究对象的一些知识（永远不能认为已有的知识已经完备），也不能认为就可以先验地确定数据要用什么函数去拟合（否则还拟合干什么？）。用来拟合数据的函数总是一个“统计假设”，必须通过对拟合结果的“检验”才能被肯定或被否定。本节限于篇幅，仅能简介一种常用的检验方法（一些最常用的大型统计软件，例如 SAS，SPSS，USINET，MINITAB 等都具备了自动进行这种检验的功能）。

4.2.1 统计假设及其检验的一些基本概念

统计假设是对两个随机变量关系(或者一个随机变量概率分布)函数的“假定描述”。

假设检验是用来决定接受或否认统计假设的过程。

假设检验的一般步骤是:提出零级假设、提出替代(否定)假设、提出可以用来检验这两个假设的一个特定随机变量(检验统计量)、最后通过数据处理来决定零级假设的可被接受或者可被否定的样本取值区域。

4.2.2 *t* 分布

标准正态分布:概率密度:$f(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-x^2/2}$,记为:$N(0,1)$。

中心 χ^2 分布:设 $X_1, X_2, \cdots, X_N$ 相互独立,$X_i \sim N(0,1)$, $i = 1,2,\cdots,N$(即每个都为标准正态分布),则 $\xi = \sum_{i=1}^{N} X_i^2$ 的分布称为“中心 χ^2 分布”,记为:$\xi \sim \chi^2(N)$。已经证明它的概率密度为:$f(x) = \frac{1}{2^{N/2}\Gamma(N/2)}e^{-x/2}x^{N/2-1}$,若 $x > 0$;$f(x) = 0$,若 $x \leqslant 0$。其中 $\Gamma(x)$ 是伽马函数:$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} u^{z-1}e^{-u}du$。它仍旧是一种单峰分布,但不一定对称。

***t* 分布**:设 X, Y 相互独立,$X \sim N(0,1)$,$Y \sim \chi^2(N)$,则 $\xi = \frac{X}{\sqrt{Y/N}}$ 的分布称为“*t* 分布”,记为:$\xi \sim t(N)$。已经证明:它的概率密度可以表示为:$f(x) = \frac{\Gamma((N+1)/2)}{\sqrt{N\pi}\Gamma(N/2)}\left(1 + \frac{x^2}{N}\right)^{-(N+1)/2}$。它仍旧是一种对称单峰分布,非常接近于正态分布。当 $N \to +\infty$ 时,*t* 分布收敛于标准正态分布。

4.2.3 中心极限定理

设 $X_1, X_2, \cdots, X_N$ 是相互独立的随机变量序列,其数学期望值为 $E(X_i) = \mu$,标准差为 $\sigma(X_i) = \sigma$。令 $\overline{X}$ 为随机变量序列的一个“N 样本均值”,当 $N \to \infty$ 时,$\overline{X}$ 的标准形式 $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}}$ 近似为一个标准正态分布。

这个定理在许多统计物理学教材中都有证明(但是表述的形式可能稍有差别)。它的意义是:如果一个随机现象由许多随机因素引起,没有任何一个或少数几个随机因素起压倒作用,则描述这个随机现象的变量近似地服从正态分布。

4.2.4 t 统计量

由 t 分布的定义容易证明：设 $X_1, X_2, \cdots, X_N$ 是取自正态总体 $N(\mu, \sigma^2(X))$ 的样本（μ 为其数学期望值，$\sigma^2(X)$ 为其方差），$X_1, X_2, \cdots, X_N$ 的均值为 $\overline{X}$，标准差为 $S = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2}$，若令 $t = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{N}}$，则 t 是一个 t 分布。

4.2.5 t 检验

我们通过一个例子来说明 t 检验的一般步骤。

设对单位质量的水样品进行了 $n = 25$ 次 pH（即含氢离子的比例）的测量，得到均值 $\overline{X} = 6.85$，方差 $S^2 = 1.0$。问题是：可以肯定水无酸性也无碱性（pH 值 $= 7.0$）吗？

对此问题的回答要通过统计假设及其检验来回答。首先，定义水的 pH 为随机变量 X，其数学期望值为 μ，标准差为 S；然后提出零级假设 $H_0: \mu = \mu_0 = 7.0$，以及替代假设 $H_1: \mu \neq \mu_0 = 7.0$。再次选定检验统计量：$t = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$，并且选择一个“可信度”（误差下限）：$\alpha = 0.05$。把 $\overline{X} = 6.85, \mu = \mu_0 = 7.0, S^2 = 1.0, n = 25$ 代入 $t = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$，得到 $t_0 = -2.37$。由本章末尾所附的 t 分布表，可以查出 $t_{\alpha/2}(n) = t_{0.025}(25) = -2.060 > -2.37$（即 $t_0 = -2.37$ 落在规定的可信区间之外），所以 H_0 被否定，H_1 被肯定，即水的 pH 不等于 7.0.

4.3 一元线性回归

在统计学中，“回归”就是从两个随机变量的观测值分析它们之间的相互变化函数关系（令一个随机变量变化，看另一个随其变化的规律），也就是物理学中所谓的数据拟合，即从两个随机变量的有限数据序列中提取它们的关系函数。回归与拟合这两个名词的最大区别可能在于传统的物理学常常认为两个物理量之间的关系是确定的，测量数据偏离规律只是由于存在测量误差；而统计学认为两个随机变量之间并不存在确定的依赖关系，只能从大量数据中分析它们之间的统计规律。物理系的学生常常在拟合数据时生搬硬套某种（由权威者提出的）规律，而不坚持从实际出发，也许正反映了他们在许多物理学验证实验中养成的思考习惯。

如上所述，用什么函数去拟合数据，应该看作一个统计假设，经过检验后才

能被肯定或者被否定。然而,在一般的物理论文(包括当前的复杂网络研究论文)中,对拟合结果进行检验的还很少,大部分研究都通过画图来直观地表示拟合的好坏。在这种情况下,应该尽量使用线性拟合,也就是设计一个坐标平面,使得作者假设的拟合函数在平面上表示为一条直线。例如作者猜测随机变量 X,Y 的关系函数为:$Y=1/X$,那么就可以用 $1/X$ 做横坐标轴,Y 做纵坐标轴,从而期望 Y 随 X 变化的数据序列在这个平面上落在一条直线附近。一般情况下,尽量避免使用曲线(非线性)拟合。这是由于人眼对数据点符合一条直线的好坏比较敏感,而对数据点符合一条曲线的好坏不太敏感;而且对一条拟合直线的函数形式没有争议,对曲线拟合却常常有这样的可能:在数据点覆盖的范围内,有不止一种函数形式可以大致同等良好地描述这一段拟合曲线。

限于篇幅,本书仅介绍一元函数的线性回归。

4.3.1 回归分析的主要步骤

一般的,回归分析的步骤是:判断变量之间是否能建立回归模型;由分析选择回归模型;根据数据估计回归方程的各个未知参数;进行回归模型的统计假设检验;利用回归模型进行问题的分析及预测。

4.3.2 一元函数线性回归模型与参数估计

若随机变量 Y 依赖且仅依赖于随机变量 X,而且可以猜测存在线性依赖关系,则可建立 Y 的数学期望值与 X 取值之间关系的模型为:$E(Y|X)=a+bX$,其中 $E(Y|X)=\sum_{i=1}^{N}x_i p(x=x_i)$ 为 X 变化时 Y 的数学期望值(其中 X 为随机变量,x_i 是 X 的一个取值,$p(X=x_i)$ 表示 X 取 x_i 的概率),$a=E(Y|X=0)$,称为"截距",$b=\dfrac{E(Y|X_2)-E(Y|X_1)}{X_2-X_1}$,称为"回归系数",也就是坐标平面上回归直线的斜率。

估计截距和回归系数最常用的方法是最小二乘法。它的思想是:拟合直线必须最接近于所有的 N 个数据,而"接近程度"的测量依赖于一个数据点与它在拟合直线上对应点之间的距离。这个距离可以写为:$\hat{Y}_i=\hat{a}+\hat{b}X_i$,其中 $\hat{Y}_i,\hat{a},\hat{b}$ 是"试探拟合直线"对 X_i 给出的参数和函数值。令 $\sum(Y_i-\hat{Y}_i)^2=\sum(Y_i-\hat{a}-\hat{b}X_i)^2$ 最小,容易得到两个公式:

$$\sum Y_i=N\hat{a}+\hat{b}\sum X_i \text{ 和 } \sum X_iY_i=\hat{a}\sum X_i+\hat{b}\sum X_i^2。$$

由此可解得:$\hat{b}=\dfrac{N\sum X_iY_i-(\sum X_i)(\sum Y_i)}{N\sum X_i^2-(\sum X_i)^2}$, $\hat{a}=\bar{Y}-\hat{b}\bar{X}$。

已经证明:$\hat{a},\hat{b}$ 分别对于它们的数学期望值呈现正态随机分布,所以可以把

它们看作随机变量来求它们的方差，可得到

$$\sigma_{\hat{b}}^2 = \frac{Ns^2}{\Delta}, \sigma_{\hat{a}}^2 = \frac{s^2 \sum X_i^2}{\Delta},$$

其中 $s^2 = \dfrac{\sum (Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i)^2}{N-2}$，　$\Delta = N\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2$。

关于最小二乘法的局限和对策将在本章后面讨论。

4.3.3　一元函数线性回归模型的假设检验

已经证明：$\hat{a}$，$\hat{b}$ 分别对于它们的数学期望值 a，b 呈现正态随机分布，因此，如前所述，它们的标准形式：$Z_{\hat{b}} = \dfrac{\hat{b}-b}{\sigma_{\hat{b}}}$ 和 $Z_{\hat{a}} = \dfrac{\hat{a}-a}{\sigma_{\hat{a}}}$ 也近似为正态分布。类似地，由 t 分布的定义容易证明：$t_{\hat{b}} = \dfrac{\hat{b}-b}{S_{\hat{b}}}$ 和 $t_{\hat{a}} = \dfrac{\hat{a}-a}{S_{\hat{a}}}$ 都是 t 分布，其中 $S_{\hat{b}} = \sqrt{\dfrac{s^2}{\Delta}}$，$S_{\hat{a}} = \sqrt{\dfrac{s^2\sum X_i^2}{N\Delta}}$。

通常大家只关心线性拟合直线的斜率，所以只进行 $\hat{b}$ 的假设检验。

零级假设，$H_0: b = b_0$（b_0 为从有限个数据做线性拟合假设得到的拟合直线斜率）。

替代假设，$H_1: b \neq b_0$。

计算 $t_{\hat{b}} = \dfrac{\hat{b}-b}{S_{\hat{b}}}$，代入观测值，并且用 b_0 代替公式中的 b，计算出 t_0，然后查阅本章所附的 t 分布表，如果 t_0 大于对于已经确定的可信度 α 所查到的 $t_{\alpha/2}(N-2)$，或者小于 $t_{1-\alpha/2}(N-2)$，则零级假设不成立（替代假设成立），即本次线性回归结果不可信（拟合的误差或者涨落大于确定的可信度，说明这些数据很可能不显示线性依赖关系）。

4.3.4　一元函数线性回归模型的相关性描述

在 4.1 节中已经介绍了两个随机变量的相关系数，它可以表示为：$\rho(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y)/[\sigma(X)\sigma(Y)]$。这里，对于两个随机变量 X、Y 的线性回归问题，依据此定义，并考虑有限个数据，容易把定义式改写为

$$r_{XY} = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \overline{X})^2 \sum (Y_i - \overline{Y})^2}}。$$

这时的相关系数也称为“皮尔森系数”，它常常用来代替上面介绍的假设检验，比较简便地描述线性拟合的好坏。当 $r_{XY} = 1$，为完全线性正相关（两个变量的取值都压在斜率为正的拟合直线上）；当 $r_{XY} = -1$，为完全线性负相关（两个变量的

取值都压在斜率为负的拟合直线上)；当 $r_{XY}=0$,为完全不相关(两个变量的取值随机分布,完全不能线性拟合)。

4.4 回归的一些问题

前面三节所介绍的一元线性回归是最简单、最常用的数据拟合方法。大家可能也已经用过多次,然而,其中也还可能出现种种问题。

我们不可能精确预言一个随机变量的一次测量值,一个随机变量测量值 x 的出现概率 $P(x)-x$ 函数就是对随机变量测量值的最完全描述。一个常见的问题在于如何从有限的、常常伴随相当大统计涨落的测量值中提取正确的 $P(x)-x$ 函数。

更常见的问题可能是寻求两个随机变量的相关性。如何从测量值中提取正确的相关性函数同样是常见的重要问题。

这两个问题常常都涉及一元线性回归的正确应用。

本节限于篇幅,只能简单讨论回归的三个问题。这些讨论反映我们的观点,欢迎指正。

4.4.1 关于幂律分布函数

一些学校的本科毕业生(甚至研究生)在寻求回归函数中经常暴露出研究态度、观点的问题,它与我们教育中的一些弱点密切相关。对这些同学我们感觉需要强调:搜集数据、进行统计的目的是为了揭示系统的客观规律。正确反映实际的规律就是好结果,决不是得到一个追随潮流的规律才是好结果。即使你得到的符合潮流的回归结论是正确的,如果仅仅给已经被大量实际例证证明的理论结论再增加一个例证,分量也微不足道。反之,如果正确地得到一个反潮流的回归结论,揭示已经被大量实际例证证明的理论结论还不能描述的例外系统的规律,并且自己来建立理论,才是有分量的工作。

我们用 1999 年后,BA 模型[7]发表以来,在一些研究成果中出现的"幂律度分布"(将在下面两章中详细介绍)实证研究结果的潮流来作为例子。所谓网络的"度"定义为一个节点的邻边数(也可以定义为邻点数)。"幂律度分布"就是度的数值出现的概率遵循的分布为一个幂函数(度分布 $P(k)$ 定义为任选一个节点,它的度恰好为 k 的概率)。由于已经发表了相当多的文献,报道了不少实际网络系统的度分布都遵循幂律,有些同学就误认为只有在一个实证研究中得到幂律度分布才是好的,千方百计凑出这样的结果。

实际上,前面几节中介绍的正态分布是作为统计学基础的最重要分布。一个正态分布表示对规则情况施加一个对称随机干扰导致的分布,或者说许多个

体由于各式各样的原因显示多少偏离平均值的测量结果导致的分布。大多数实际系统性质测量值的分布都遵从正态分布，例如一个单位、地区所有人的身高、体重的分布。每个人的身高、体重的取值取决于许多各自不同的、不相关联的因素，但是都围绕着一个平均值波动，相当于对规则情况施加一个对称随机干扰。正态分布是一个关于平均值对称的钟形曲线。均值加、减标准偏差正好是曲线的两个拐点。这与一个开放的环境下，个人的收入、教育程度或者学术成就等可以由个人努力程度决定的那些性质测量值的分布完全不同，后者常常显示幂律分布。

幂律是最严重不均匀、最偏离正态的分布。它表示极少数极大的测量值与绝大多数极小的测量值之间的最显著差别。虽然一百多年来，大家注意到许多自然现象的测量值分布遵从幂律（例如，情况非常不同的国家内，财富分布都是幂律，地震的烈度、城市人口、中英文词汇的出现频率等也都遵从幂律），这绝不是说幂律应该支配一切系统的一切性质或是最常见的分布。关于幂律的报道很多，应该理解为对反常规律的特别注意（为什么这么奇怪的现象还不少?）。最常见的分布应该是正态分布。英语的正态分布是 normal distribution，也可以称为“通常的分布”。

对于遵从指数函数的分布也应该给予注意。指数函数是差别程度比较小的不均匀分布。如果是指数分布，极大的测量值出现的概率基本是零，不会有，而在幂律分布中很大的值都有相对高得多的出现概率。如果截取一个正态分布的一半，它的下降趋势很接近于一个指数函数，应该注意区分这两种情况。

第 10 章中将介绍 SPL 分布，它可以把幂律和指数函数分布统一描述。一个 SPL 分布可以表示为 $P(x)=(x+\alpha)^{-\gamma}$，当 $\alpha=0$ 时，SPL 分布成为幂律；当 $\alpha\rightarrow\infty$ 时，SPL 分布趋近于指数函数。因此幂律和指数函数成为普遍的 SPL 分布的不同极端情况。

我们还要强调：实际情况千变万化，上面讨论的正态分布、指数函数分布、幂律分布并不能包含所有的可能，必须对每一个具体系统做出尊重客观事实的研究。

研究过程中也可能会出现各种错误，下面举出我们（扬州大学课题组）在研究一个实际网络中所犯过的错误作为例子。

图 4.1(a) 显示我们在 2003 年对 1999 年中国铁轨网的度分布实证数据的处理结论。当时负责研究的学生把数据画在双对数平面上，并且得出结论说度分布是幂律。然而，仔细看数据的分布，明显的存在向下弯曲的系统误差，不能被认为可以拟合为双对数平面上的一条直线。图4.1(b) 显示 2004 年该学生的毕业论文中相应的图，数据虽然还显示对单对数平面上的一条拟合直线的偏离，但是偏离有所减小，所以指数函数度分布结论的可信度有所提高。然而，再仔细

看一看,图4.1(b)中的数据分布仍旧好像描绘出一条光滑的曲线,所以拟合为单对数平面上的一条直线的结论仍旧值得怀疑。图4.1(c)显示这些数据在原始的线性坐标平面上的“偏斜高斯分布”的曲线拟合,看来这才是符合实际的规律。一般说来,如果把车站(或者交叉路口)定义为网络的节点,把道路对于两个节点的连接定义为网络的边,道路网的度分布都是偏斜高斯分布。国内外比较高水平的研究都证实了这个结论。由于从车站(或者交叉路口)出发的道路

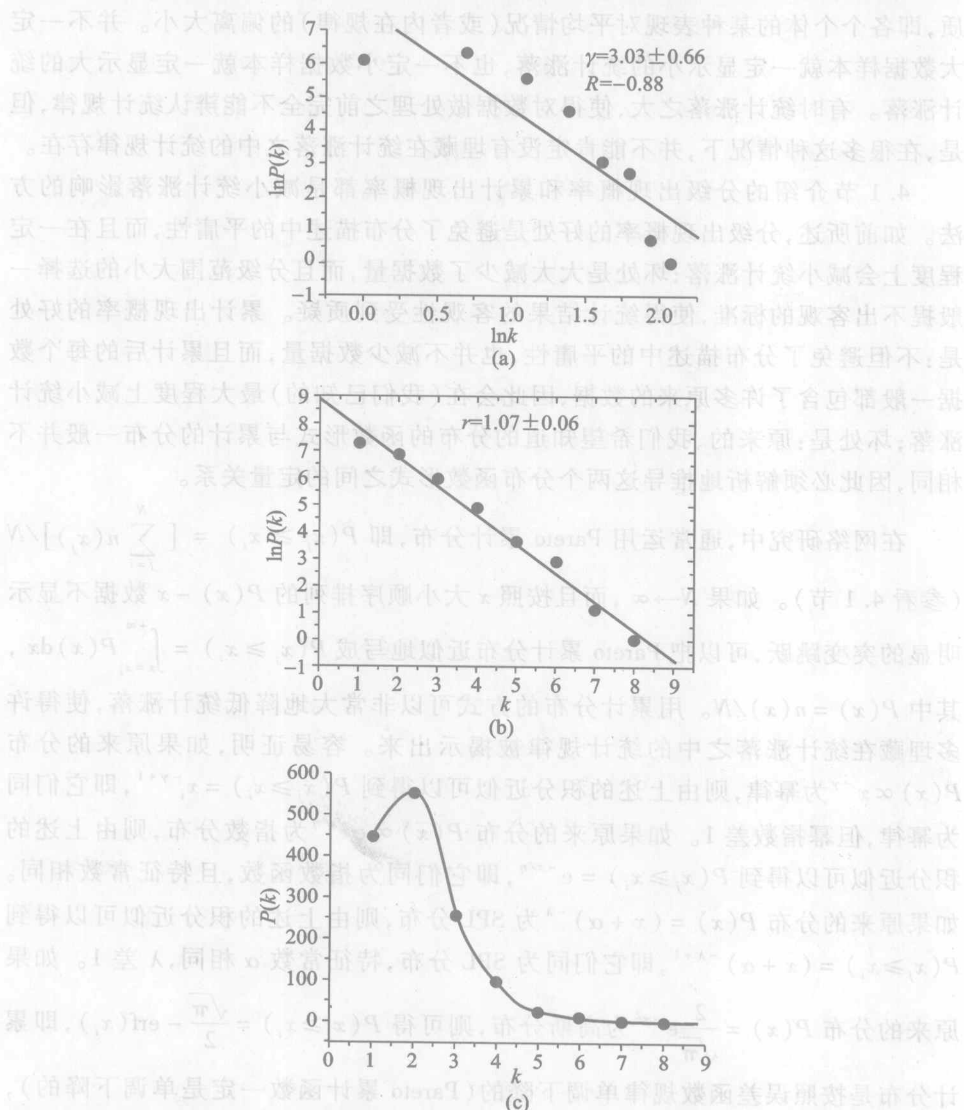


图 4.1 扬州大学课题组对 1999 年中国铁轨网的度分布实证数据的处理结论

数通常不会偏离平均值太多,所以这个结论也是直观合理的。这个例子提醒我们注意在原始的线性坐标平面上观察数据。随便就取双对数或单对数坐标有时会掩盖原来可能容易分辨的特征。

4.4.2 关于累计的回归函数

统计涨落是进行回归必须考虑的问题之一。它通常反映了系统的固有性质,即各个个体的某种表现对平均情况(或者内在规律)的偏离大小。并不一定大数据样本就一定显示小的统计涨落,也不一定小数据样本就一定显示大的统计涨落。有时统计涨落之大,使得对数据做处理之前完全不能辨认统计规律,但是,在很多这种情况下,并不能肯定没有埋藏在统计涨落之中的统计规律存在。

4.1 节介绍的分级出现概率和累计出现概率都是减小统计涨落影响的方法。如前所述,分级出现概率的好处是避免了分布描述中的平庸性,而且在一定程度上会减小统计涨落;坏处是大大减少了数据量,而且分级范围大小的选择一般提不出客观的标准,使得统计结果的客观性受到质疑。累计出现概率的好处是:不但避免了分布描述中的平庸性,也并不减少数据量,而且累计后的每个数据一般都包含了许多原来的数据,因此会在(我们已知的)最大程度上减小统计涨落;坏处是:原来的、我们希望知道的分布的函数形式与累计的分布一般并不相同,因此必须解析地推导这两个分布函数形式之间的定量关系。

在网络研究中,通常运用 Pareto 累计分布,即 $P(x_j \geqslant x_i) = [\sum_{j=i}^{N} n(x_j)]/N$(参看 4.1 节)。如果 $N\to\infty$,而且按照 x 大小顺序排列的 $P(x)-x$ 数据不显示明显的突变跳跃,可以把 Pareto 累计分布近似地写成 $P(x_j \geqslant x_i) = \int_{x=x_i}^{+\infty} P(x)\,\mathrm{d}x$,其中 $P(x)=n(x)/N$。用累计分布的方式可以非常大地降低统计涨落,使得许多埋藏在统计涨落之中的统计规律被揭示出来。容易证明,如果原来的分布 $P(x)\propto x^{-\gamma}$为幂律,则由上述的积分近似可以得到 $P(x_j\geqslant x_i)=x_i^{-\gamma+1}$,即它们同为幂律,但幂指数差 1。如果原来的分布 $P(x)\propto \mathrm{e}^{-x/\eta}$ 为指数分布,则由上述的积分近似可以得到 $P(x_j\geqslant x_i)=\mathrm{e}^{-x/\eta}$,即它们同为指数函数,且特征常数相同。如果原来的分布 $P(x)=(x+\alpha)^{-\lambda}$ 为 SPL 分布,则由上述的积分近似可以得到 $P(x_j\geqslant x_i)=(x+\alpha)^{-\lambda+1}$,即它们同为 SPL 分布,特征常数 α 相同,λ 差 1。如果原来的分布 $P(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}$为高斯分布,则可得 $P(x_j\geqslant x_i)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\mathrm{erf}(x_i)$,即累计分布是按照误差函数规律单调下降的(Pareto 累计函数一定是单调下降的),很像一个指数函数,或者高斯分布的半枝。类似地,容易得到所有显函表示的随机量 Pareto 累计分布函数与原来的不累计函数之间的关系,例如一个二次多项

式的 Pareto 累计分布对应一个线性的原来不累计分布函数，等等。

图 4.2 与图 4.3 为显示我们数据处理中的累计与不累计区别的一个具体例子。图 4.2 显示南京、杭州、北京、上海的公交线路含站点数的不累计分布，数据显示相当大的统计涨落，勉强可以近似地用高斯分布来拟合，但可信度很低。图 4.3 显示相应的南京、杭州、北京、上海公交线路含站点数累计分布。统计涨落大大减小了，显示很好的统计规律。

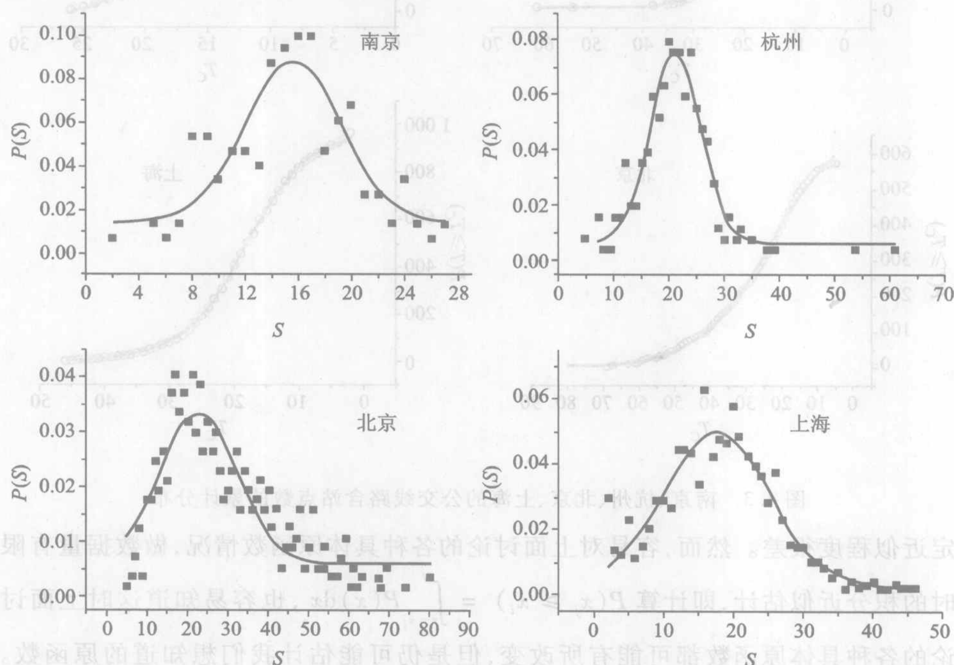


图 4.2 南京、杭州、北京、上海的公交线路含站点数的不累计分布

如果问题并不是寻求一个随机变量的取值分布，而是寻求两个随机变量的相关性，那么上述的累计估计方法还适用吗？有些人认为不适用，因为寻求两个随机变量的相关性时，不好判断应该累计哪一个随机变量，而且累计一个进行统计时，得到的另一个相关量的物理意义经常也说不清。我们认为，不管是寻求一个随机变量的取值分布，还是寻求两个随机变量的相关性，累计方法都是一种处理数据、提取规律的技巧。其目的在于从统计涨落中挖掘统计规律。只要上述的两个近似条件（即样本的数据量够大，而且按照 x 大小顺序排列的 $y-x$ 数据不显示明显的突变跳跃）满足，就常常可以从累计结果中提取出埋藏在统计涨落中的累计规律，然后由上述的积分近似得到原来的不累计规律，中间量是哪一个，它的意义如何并不重要。

如果只可能得到小样本数据，累计估计还适用吗？这时上述的积分近似肯

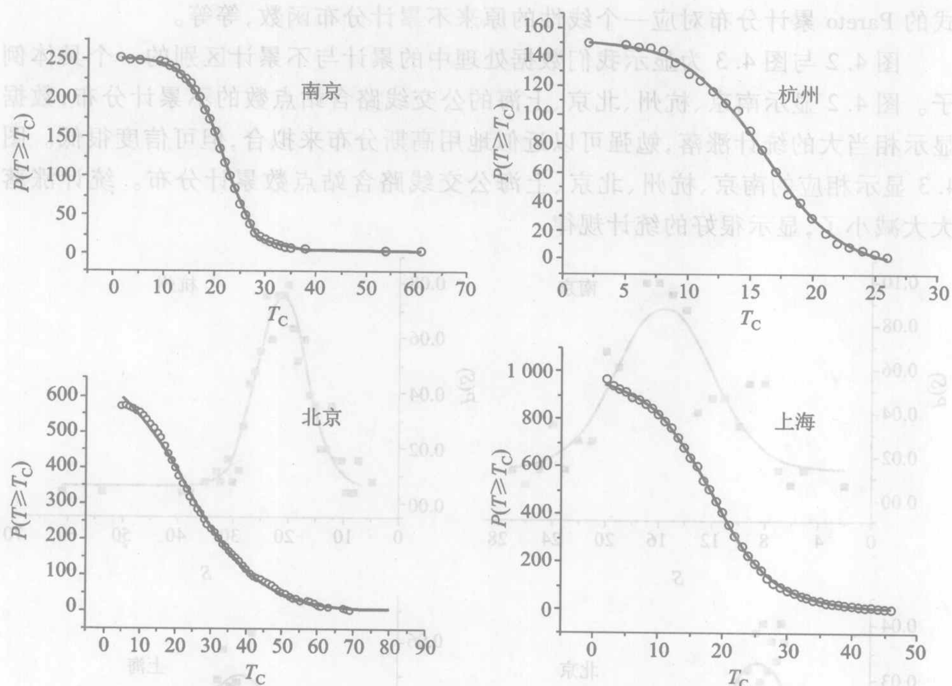


图 4.3 南京、杭州、北京、上海的公交线路含站点数的累计分布

定近似程度很差。然而,容易对上面讨论的各种具体原函数情况,做数据量有限时的积分近似估计,即计算 $P(x_j \geq x_i) = \int_{x=x_i}^{N} P(x)\,dx$,也容易知道这时上面讨论的各种具体原函数都可能有所改变,但是仍可能估计我们想知道的原函数。唯一要警惕的是按照 x 大小顺序排列的 $y-x$ 数据不能显示明显的突变跳跃,例如,对于一个脉冲式的 $y-x$ 数据序列,就不能使用这种累计估计方法。

我们强调,不管是上面哪一种情况,从上述的积分近似得到的不累计原函数都只能被看做一种通过近似所作的估计、猜测,其真实性和客观性还需要通过其他方法检验或说明。

4.4.3 关于幂函数标度因子的讨论

图 4.4 显示复杂网络论文科研合著网的"节点项目度"分布函数拟合。网络包括 1 354 个被定义为节点的论文作者,以及 900 篇被定义为"合作项目"的论文。每个作者参与写作的论文数被定义为他的"节点项目度"。图的横轴就是节点项目度 x,纵轴为 x 取值发生的概率 $P(x)$。画在双对数平面上的数据点看来可以被一条直线拟合,也就是科研合著网的节点项目度分布应该满足幂律。

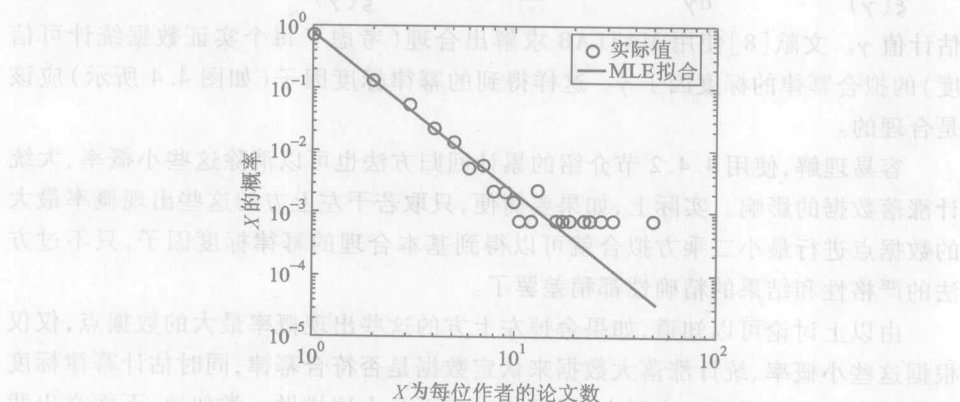


图 4.4 复杂网络论文科研合著网的"节点项目度"分布函数拟合(引自文献[8])

问题在于:右下方的这些出现概率最小的数据点呈现很大的统计涨落以及对直线规律相当大的偏离。如果直接对全部数据使用4.3节介绍的一元线性回归方法(或者称为最小二乘法),得到的拟合直线将与图中所示的实线差距很大,显示对所有数据比较大的偏离。它的斜率,也就是所求得幂律的标度因子,将显著地小于图中所示的实线斜率,比较大地偏离实际值。这是由于4.3节介绍的一元线性回归同等地看待所有的数据点,因此右下方的这些出现概率最小的数据点就对拟合结果有很大贡献。然而,容易理解,左上方的这些出现概率最大的数据点虽然少,但是每一个实际上已经包含了大量的实证数据,具有最高的统计可信度,因此应该对拟合结果作关键贡献,而右下方的这些出现概率最小的数据点虽然多,但是每一个仅仅包含很少实证数据,因此应该在拟合时少加考虑。那么,什么是对待它们最合适的标准和处理方法呢?文献[8]建议使用一种被广泛采用的、称为"最大似然估计"的数据拟合方法。在这种方法中,观测数据 x_i($i=1,2,\cdots,N$)被假设为由统计模型 $P(x)=x^{-\gamma}/\xi(\gamma)$ 生成,其中 $\xi(\gamma)=\sum_{x=1}^{\infty}x^{-\gamma}$。如果模型参数 γ 已知,那么观测数据出现概率为 $L(x,\gamma)=\sum_{i=1}^{N}(x_i^{-\gamma}/\xi(\gamma))$。反之,如果模型参数 γ 未知,函数 $L(x,\gamma)$ 称为模型参数 γ 的似然函数,记为 $L(\gamma|x)$。不同的 γ 值对应的观测数据 x_i($i=1,2,\cdots,N$)出现概率不同。根据已经证明的最大似然原理,使似然函数最大的模型参数 γ 值称为"最大似然估计值"。因此,对 $L(\gamma|x)$ 取对数,并对 γ 求导,得到 $\dfrac{\mathrm{d}(\ln L(\gamma\mid x))}{\mathrm{d}\gamma}=-\sum_{i=1}^{N}\ln(x_i)$

$-N\dfrac{\xi'(\gamma)}{\xi(\gamma)}$。令 $\dfrac{\mathrm{d}(\ln L(\gamma \mid x))}{\mathrm{d}\gamma} = -\sum_{i=1}^{N}\ln(x_i) - N\dfrac{\xi'(\gamma)}{\xi(\gamma)} = 0$，可以解得最大似然估计值 γ。文献[8]使用 MATLAB 求解出合理（考虑了每个实证数据统计可信度）的拟合幂律的标度因子 γ。这样得到的幂律标度因子（如图 4.4 所示）应该是合理的。

容易理解，使用 4.4.2 节介绍的累计回归方法也可以消除这些小概率、大统计涨落数据的影响。实际上，如果要简便，只取若干左上方的这些出现概率最大的数据点进行最小二乘方拟合就可以得到基本合理的幂律标度因子，只不过方法的严格性和结果的精确性都稍差罢了。

由以上讨论可以知道，如果舍掉左上方的这些出现概率最大的数据点，仅仅根据这些小概率、统计涨落大数据来认定数据是否符合幂律，同时估计幂律标度因子是完全不合适的。实际上，近几年来有不少人这样做。类似地，下面举出我们（扬州大学课题组）在研究一个实际网络中所犯过的错误作为例子。

图 4.5(a) 显示我们在 2003 年对中药网（定义药材为网络的节点，两种药材同时出现在一服药剂时，连接一条边）的度分布实证数据的处理结论。当时负责研究的学生类似地把数据画在双对数平面上，按照当时流行的方法，他舍掉左上方的这些出现概率最大的数据点，仅仅根据小概率、大统计涨落数据来估计拟合结果，得出结论说度分布是幂律。图 4.5(b) 显示我们在 2006 年对同样的中药网度分布实证数据的处理结论。经过累计处理后的数据在 SPL 函数的特征坐标平面上非常好地拟合于一条直线，因此，合理的结论是：中药网度分布遵循 4.4.1节介绍的 SPL 函数。对比这两幅图，不难看出哪一种方法好。

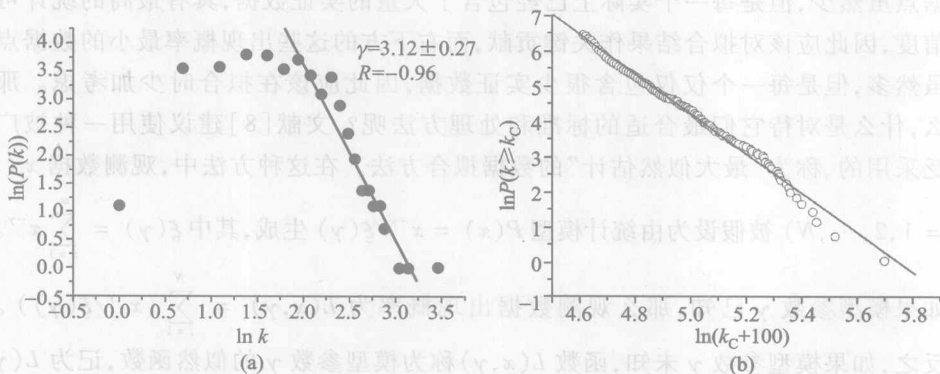


图 4.5 扬州大学课题组对中药网度分布实证数据的处理结论

4.5 漫谈数据的采集与处理

4.5.1 普遍性与特殊性

我们在本章开始就指出网络的实证研究是必须的。这些研究包括搜集数据、处理数据、从不可避免地包含噪声与统计涨落的数据中提取统计规律。

为什么要采集数据、处理数据,实证地研究复杂网络?我们认为主要有两个目的。第一个是为了寻找每一类复杂系统演化的普适描述方法和普适动力学机制。这是物理学工作者对任何科学领域研究的目标。许多复杂系统从来就被人们看作网络,还有许多系统最近才被看成网络,总之用网络来描述复杂系统是大家当前的希望,而且把复杂系统看成网络看起来是合理的。然而,对于这第一个目的,目前的网络理论框架还达不到要求,还需要深刻的改进。在目前的网络理论的框架内,能够找到并解释一些实际网络的共同特征,例如"小世界性"[9]、"无标度性"[7]和"群落结构"[10],也是很鼓舞人心、具有深远开创意义的结果。即使只能找到一小类实际网络的共同特征(如本书第10章讨论的合作网络和合作-竞争网络),也很不错。

第二个目的是借助于网络描述揭示某个(种)实际系统的重要特性,来为实践服务。例如对于因特网、各种交通网、电力网、语言结构网、各种生物网络的研究,不但吸引了一些基础理论工作者的注意,也成为(或者从来就是)这些科学领域的本行专家们的关注热点。近几年来,从事这些网络研究的这两部分力量有更好的结合趋势,可望得到更好的成绩。

第一个目的着重于复杂系统的普遍性质,正像传统物理学研究追求的宇宙物质演化普遍规律一样。第二个目的着重于复杂系统的具体、特殊性质,正像各个应用学科追求的对于具体规律的理解和驾驭一样。

因此,在当前的网络实证研究中,普遍性与特殊性应该同等地受到重视,同时,又应该注意发展、改进网络理论,以便适应这两方面的要求。

4.5.2 漫谈数据采集与处理

搜集数据是实证研究的开始。从1978年以来,已经发表了大量的复杂网络实证研究论文,涉及各个大科学领域的许多实际系统。这些数据中的大多数来自各个网站,是各个领域的专家们为了自己的研究而搜集、整理的。例如,得到比较多研究的好莱坞演员合作网络和科研合著网络,前者的数据来自美国的因特网电影数据库(the Internet movie database)等电影网站,后者来自美国洛斯阿拉莫斯国家实验室预印本数据库以及其他同类网站。这些数据包含的数据量很

大,允许自由下载,因此有不少人使用这些数据构造网络,进行研究。所以搜集数据一般是在网上漫游和操作的过程,然而,在搜集数据中也有一些困难和值得注意的问题。

首先,不管数据量多大,它总不可能完全地描述客观系统,总是一个前面介绍的"统计样本",存在着局限性。例如,来自美国的因特网电影数据库的好莱坞演员合作网络数据尽管包括30多万个演员、10多万部影片,但是对一些大型影片仅仅列出了所有演员的很少一部分。自然,任何电影数据库都不可能把所有群众演员都列入供人研究,然而,由于这些数据都没有包含能够描述演员或者科研论文作者在影片制作或者论文研究写作中所起的不同作用,所有依据这些数据构建的(演出或撰写的)合作网络都没有考虑各个演员或作者在合作中的不同地位,而是不加区分地认为所有演员或作者都在等同地合作。这样的考虑不但过于简化,而且也和去掉一部分人(有时可能是总人数的一大部分)自相矛盾。肯定有不少人希望用含有演员或作者在合作中的不同地位信息的网络来更完全地描述这两种系统,但是问题很可能在于找不到这样的数据(例如演员的片酬、作者的实际贡献大小的数据)。

其次,网络研究发展到现在,仅仅报道一个新的、可以用网络描述的系统的论文已经很难发表。大家要求报道实证研究的论文包含新思想、新规律、新现象,所以搜集数据的时候就必须具有明确的目标。例如,如果打算报道含有演员或作者在合作中的不同地位信息的合作网络实证研究,就必须设法找到相应的数据,而通常这在原来的数据库中不可能做到。有些人在这种情况下就认为不得不放弃原定的目标,但是如果脑子灵活一点,很可能可以对某些比较容易得到的数据加工,来达到原定的目的。例如描述科研论文作者在合作中的不同地位信息,可能可以先在Google等搜索引擎中分别输入两个作者的名字,然后一起输入他们两人的名字,就可以分别得到搜索引擎对两个作者学术活动报道的信息总条数,以及对他们共同学术活动报道的信息条数。把这些信息加以适当组合,就可能用来描述科研论文作者在合作中的不同地位(引自韩国郑夏雄教授2007年10月在扬州大学的学术报告)。所以,能不能找到高质量的数据,可以说是高质量网络研究的开始,而这首先取决于有没有明确、灵活的学术思想。

找到合适的数据以后,还存在一系列的技术问题。在网上下载的数据格式各种各样,而我们使用的处理数据的软件也各式各样。通常都需要自己编写程序,把网上下载的数据格式进行转换。一些最常用的大型统计软件,例如SAS, SPSS, USINET, MINITAB等,都要求各自不同的数据格式。除此之外,还要注意保留尽可能多的原始信息。在我们研究的一个时期,可能以处理数据、得到某一些统计性质为目标,这时往往只在包含这些统计所需要的数据上工作,而没有注意保留最原始的数据。过了一些时间之后,常常会意识到另外一些统计性质的

重要性，如果没有保留最原始的数据，就必须从头开始，浪费大量时间和精力，甚至于在某些必须手工加工数据的情况，也许由于重新做一遍的代价太大，根本不可能再恢复原来的数据。

有了合适的数据和格式，下一步就需要有合适的软件来处理数据，得到我们将在第6章中仔细介绍的各种网络统计性质。SAS，SPSS，USINET，MINITAB等常用大型统计软件使用方便，可以处理的数据量很大，又带有画出各种图表、进行回归及其检验等非常全的功能。然而，由于网络研究发展很快，这些大型统计软件的功能发展一般赶不上网络研究的需要，各个课题组都在自己编写程序。

得到的统计结论的客观性与可靠性同样是重要的问题。这一点已经在本章前面几节中讨论。

第四章参考文献

[1] 杨振海，张忠占．应用数理统计．北京：北京工业大学出版社，2005.

[2] 贝文顿 P R. 数据处理和误差分析．仇维礼，徐根兴，赵恩广，陈生忠，译．北京：知识出版社，1986.

[3] Gentle J E. 计算统计学基础．北京：科学出版社，2006.

[4] Chiang C L. Statistical Methods of Analysis. New Jersey：World Scientific，2003.

[5] 甘健胜．概率论与数理统计．北京：清华大学出版社，2005.

[6] L. A. Adamic，Zipf. Power-laws and Pareto——a ranking tutorial，http：// www.hpl. hp. com/ resarch/id1/papers/ranking/ranking. html.

[7] A-L. Barabasi and R. Albert，Science，286（1999）509.

[8] M. L. Goldstein，S. A. Morris and G. G. Yen，Eur. Phys. J. B，41（2004）255.

[9] D. J. Watts and S. H. Strogatz，Nature，393（1998）440.

[10] M. Girvan and M. E. J. Newman，PNAS，99（2002）7821.

附　录

t 分布表（引自文献[4]）：

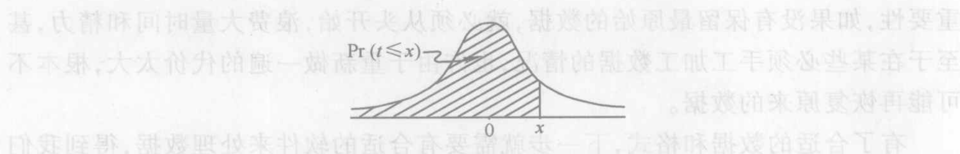


Table A3. "Student' s" t distribution.

df	$t_{0.60}$	$t_{0.70}$	$t_{0.80}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.363	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	3.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576
df	$-t_{0.40}$	$-t_{0.30}$	$-t_{0.20}$	$-t_{0.10}$	$-t_{0.05}$	$-t_{0.025}$	$-t_{0.01}$	$-t_{0.005}$

This table was adapted from Table II of Fisher and Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural, and Medical Research Workers* (5th ed.) and Fisher, *Statistical Methods for Research Workers*, published by Oliver and Boyd, Ltd., Edinburgh, with the permission of the publishers.

第五章 图论简介

如前几章所述,进行复杂网络研究要求具有关于复杂性与复杂系统、统计物理学、博弈论以及概率论与数理统计等领域的知识。对所有这些基础知识做初步的介绍,并推荐一些供进一步学习的参考资料,是本书的目的之一。从本章开始,我们将转入与复杂网络密切相关的讨论。然而,在开始介绍复杂网络的研究成就之前,还必须用一两章的篇幅介绍最相关的数学基础知识,这就是图论和网络的统计性质。图论是公认的复杂网络研究的数学基础。虽然传统的图论并不是以复杂系统动力学描述为目标的,它也远远不能够满足研究复杂网络的物理学工作者的需要,但是目前还没有更好的选择。经过几百年的发展,图论的研究博大精深,成果车载斗量,在本书一章的篇幅内绝对不能容纳。本章仅仅根据我们的理解,介绍一些对于复杂网络研究最必要的图论知识。由于篇幅所限,本章介绍的图论和第 6 章介绍的网络统计性质都局限于比较“枯燥”的内容,主要包括概念、定义以及不介绍证明过程的重要定理。这和前面几章稍微轻松的叙述非常不同。感到困难的读者可以参阅这两章末尾推荐的参考书。



图 5.1　欧拉(Leonhard Euler 1707—1783)

目前普遍认为图论是从 1736 年著名数学家欧拉(图 5.1)研究哥尼斯堡(Konigsberg)七桥环游问题开始的。图 5.2 显示了哥尼斯堡被河流分割为四个地区,由河上的七座桥连接的地理情况。是不是可能存在路径,使得人们可以走遍这四个地区,而且把每座桥走一次而且只走一次?这就是我们小时候常玩的“一笔画”游戏,在图论中称为“连绘图”问题。欧拉把每个地区抽象为一个点,称为图的“节点”(node),也称“结点”(vertex),每座桥抽象为两个节点之间的一条边(edge),也称“链接”(link)(图 5.3)。欧拉从这种简化出发,完全解析地证明了这样的一次遍历七座桥的路径不存在。

从 1736 年到 20 世纪 50 年代末,图论研究主要采取人眼睛看图,然后凭脑子分析,进行证明的方法。这样研究的图恐怕最多包括几百个节点。除了连绘图问题之外,传统图论的主要研究内容还有图的着色问题(平面地图的四色猜想等)、赋权图(考虑道路通行的难易程度等)中的最短路径问题、连通性问题、

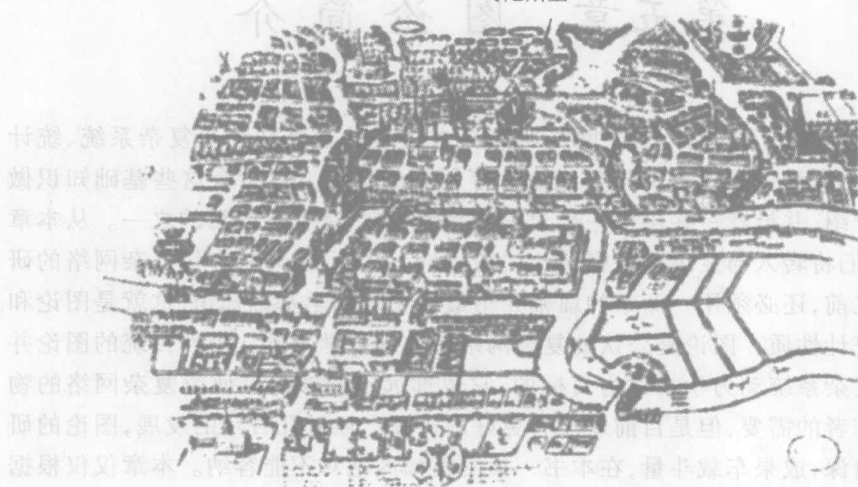


图 5.2 哥尼斯堡的七座桥（引自文献[9]）

匹配问题等等，取得了十分丰富的严格解析成果。1950 年后，随着现代计算机的发明，图的矩阵描述引起了广泛的注意。用这种方法可以研究更大规模的图（也可以称为网络）。这样，用图来描述诸如电力网、交通网、通讯网等超大规模实际网络的问题就提上了日程。伴之而来的问题是：大规模实际网络的主要特性是什么？显然，这些实际网络并不是严格规则的，那么，它们是否可能用完全随机产生的图来描述呢？如果可能，完全随机的图如何进行解析？这是 20 世纪下半叶图论研究的主要问题。

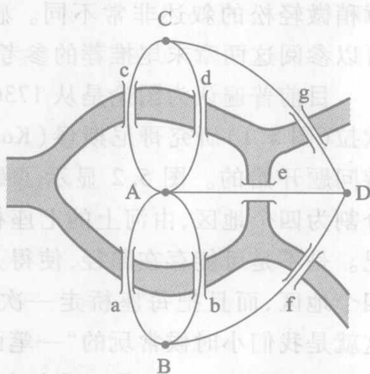


图 5.3 欧拉的图（引自文献[9]）

由匈牙利数学家额尔多斯（Paul Erdös）（图 5.4）和任易（Alfred Rényi）（图 5.5）提出的 ER 随机网模型以及他们得到的解析结果[1]代表了这一时期图论研究的最高成就和主要潮流。他们提出的 ER 随机网模型如图 5.6 所示。在每个时间步，在由 N 个节点构成的一维图中以确定概率 p 随机选择其中的两个节点连接一条边，如此演化形成一个随机网络。额尔多斯和任易解析地得到了这个随机网模型的许多重要拓扑性质。

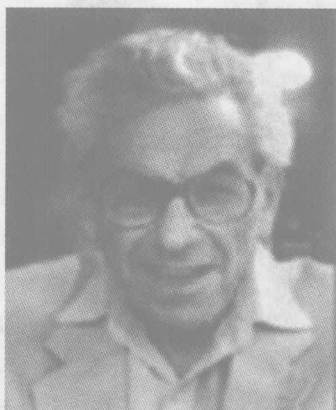


图 5.4 额尔多斯(Paul Erdös)



图 5.5 任易(Alfred Rényi)

瓦兹(Watts)(图 5.7)和斯绰伽兹(Strogatz)(图 5.8)于 1998 年在 Nature 上发表了影响很大的论文(文献[2]),提出了他们的小世界网络模型,并举出例子来说明许多实际网络都具有所谓的"小世界性",即比规则网小得多的平均距离和比随机网大得多的集群系数。随后,巴拉巴斯(Barabasi)(图 5.9)和阿尔波特(Albert)(图 5.10)于 1999 年在 Science 上发表了同样影响很大的论文(文献[3]),提出了他们的无标度网络模型,并举出例子来说明许多实际网络都具有所谓的"无标度性",即遵循幂函数的度分布。这两项伟大成就使人们认识到:大量的真实网络既不是规则网络,也不是随机网络,而是具有与两者不同统计特征的复杂网络。同时,他们首先把统计物理学的思想、方法和工具引入了网络研究,从而带动了一大批物理学工作者进入了复杂网络研究领域,开创了图论研究的新时代。

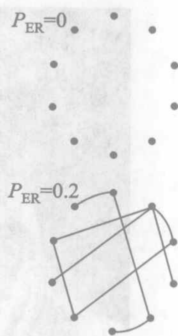
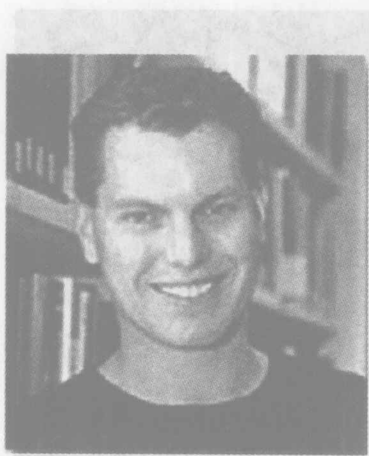
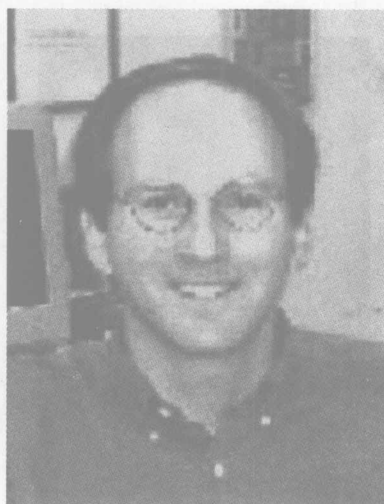


图 5.6 ER 随机网模型(引自文献[9])

从图论发展的历史可以看出:与微积分和原胞自动机完全不同,图论从一开始就不是为了作为动力学工具而创造的。传统的图论只研究平面(或二维曲面)上的一些点及其关系的拓扑性质,可以对应许多实际问题,但却都是静态的。虽然经过几百年来的发展,这一条还没有能够根本地改变。目前复杂网络的研究热潮席卷全世界,各人有不同的目的。希望把网络作为复杂系统运动学和动力学描述工具的人面临着改造图论的任务。幸运的是,已经有一些探索如何把图论作为复杂系统运动学和动力学描述工具的研究成果问世。我们将在本书第 11 章中选择一个专题做极简要的介绍。


图 5.7 瓦兹(Watts)


图 5.8 斯绰伽兹(Strogatz)

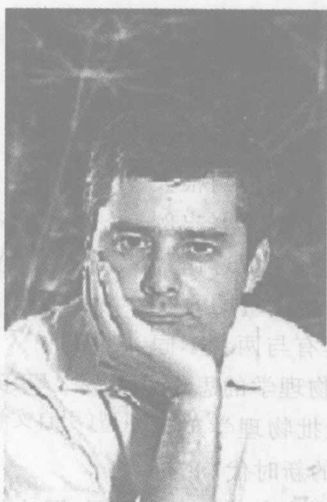

图 5.9 巴拉巴斯(Barabasi)


图 5.10 阿尔波特(Albert)

5.1 一些基本概念

本章的主要内容可参阅文献[4-8]。

5.1.1 图

1. 二元关系

(1)有序对：有序对(a,b)表示有顺序的二事物的排列。若A,B为二集合，且$a\in A,b\in B$，则所有的(a,b)有序对的集合称为A,B的“有序积”，记为$A\times B=\{(a,b)\mid_{a\in A,b\in B}\}$。

(2)二元关系：有序积$A\times B$的一个子集称为A到B的一个有序二元关系。特别当$A=B$时，A到B的二元关系称为A上的一个二元关系(A中各元素及其关系的总称)。

(3)无序对：无序对(a,b)表示无顺序的两个事物的排列，即$(a,b)=(b,a)$。则$a\in A,b\in B$的无序对集合称为A,B的无序积，记为$A\Delta B$，它的一个子集同样被称为A,B的一个二元关系。

2. 图

一个图G定义为一个对(V,E)，记为$G=(V,E)$。其中V是节点集合，E是边的集合，而一条边是两个节点的有序或者无序对，即$V\times V$或者$V\Delta V$。

也就是说，图论研究的对象——图，就是对系统中基本单元(称为节点)集合，以及每两个基本单元之间的关系(称为边)集合之间关系的描述。或者说，对所有节点和所有边之间关系(是如何连接的)的描述。

边有方向的图称为“有向图”(有序二元关系)，边无方向的图称为“无向图”(无序二元关系)。

无边的图称为“空图”。

节点的个数称为图的“阶”。

5.1.2 相邻

同一个节点伸向其他不同节点的边称为此点的“邻边”。

同一条边连接的两个端点互称为“邻点”。

5.1.3 简单图

端点重合的一条边称为“环”。

两个端点都相同的边称为“多重边”。

没有环或者多重边的图或者子图称为“简单图”，否则称为“复图”。

5.1.4 完全图

每一对节点之间均有一条边连接的简单图或者简单子图称为“完全图”。

完全图所含的节点数称为它的“阶”。

n 阶完全图记为 K_n，它有 $C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$ 条边。

5.1.5 度

若节点 $v \in V(G)$，则 G 中与 v 顶点连接的边数称为 v 在 G 中的度，记为 $\deg(v)$ 或 $k(v)$。不难理解，$\sum_{v \in G} k(v) = 2|E|$，其中 $|E|$ 为图 G 中的边数。

5.1.6 道路

图 G 中一个节点与边的交替序列为：$u = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots v_{n-1} e_n v_n$（$1 \leqslant i \leqslant n$ 时 e_i 的端点是 v_{i-1}, v_i），这个序列称为 G 中的一条“路径”（或称途径），v_0, v_n 称为途径的起、终点，u 中的边数称为路径的“长”。

若路径 u 的边 $e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}, e_n$ 均不同，称 u 为 G 中的一条“道路”。

v_0, v_n 之间最短的一条道路称为“最短道路”。

最短道路的长称为“距离”，记为 $d(v_0, v_n)$。

若 v_0, v_n 之间不存在道路，记作 $d(v_0, v_n) = \infty$。

图 G 中最大的距离称为 G 的“直径”，记为 $\mathrm{diam}(G) = \max\{d(v_0, v_n) \mid_{v_0, v_n \in V(G)}\}$。它表示 G 中相距最远两节点间最短道路的边数。

一条闭道路称为“圈”（环由一条边构成，圈由多条边构成）。

图 G 中最短的圈长称为 G 的“围长”。

图 G 中最长的圈长称为 G 的“周长”。

5.1.7 连通

若 G 中每对不同节点 u, v 之间都至少存在一条道路，则称 G“连通”，两连通节点记为 $u \equiv v$。

若 G 中任意两个节点 u, v 属于且仅属于 G 中的一个子集 $G(v_i)$ 时才连通，则称 $G(v_i)$ 为 G 的一个“连通分支”（或者简称“分支”）。

分支数 $=1$ 的图称为“连通图”，分支数 >1 的图称为“非连通图”。

5.1.8 树

不含圈的连通图称为“树”。

每个分支都是树的非连通图称为“森林”。

树中的边称为“树枝”。

5.1.9 二分图

若 $G = (V, E)$ 中，可以把节点集合 V 分割为两个互补的子集 S, T（$S \cup T = V$，

$S\cap T=\varnothing$)，则称 G 为“二分图”(或“二部图”)。

通常只讨论二分图中不同类节点之间的边。

若 $G=(V,E)$ 是 p 阶图,可以把节点集合 V 分割为 m 个互补的子集 v_1, $v_2,\cdots,v_m$,使边集 E 中的任意一条边 e 的两个端点不在同一个 $v_i(i=1,2,\cdots,m)$ 中，则称 G 为“m 分图”。

5.1.10 图的一些基本运算

1. 同构

若图 G 和图 H 的节点集之间存在一个保持各节点邻接关系的一一对应,则称 G 和 H“同构”,记为 $G\cong H$。

2. 图的并

若图 G 和图 H 无公共节点,则称它们“不相交”。

若图 G 和图 H 无公共边,则称它们“边不重”。

图 G 和图 H 中所有边构成的图称为它们的“并”,记为 $G\cup H$。

若图 G 和图 H 边不重,则它们的并称为“边不重并”或者“直和”,记为 $G+H$。

3. 图的交

图 G 和图 H 中的公共边构成的图称为它们的“交”,记为 $G\cap H$。

4. 图的差

若图 G 和图 H 有公共边,从图 G 中去掉图 H 具有的边,得到的子图称为它们的“差”,记为 $G-H$。

5. 图的环和

从图 G、图 H 的并中去掉它们的交,得到的子图称为它们的“环和”,记为 $G\oplus H$。

6. 图的补

若图 H 是图 G 的一个子图,从图 G 中去掉图 H 的边得到的子图称为图 H 的“补”。

7. 图的收缩

把图 G 节点集合$\{v\}$的一个真子集 v_r 中的所有节点都合为一个,称为“在图 G 中收缩 v_r”。原图 G 中所有与 v_r 中的所有节点连接的边变化为与此重合点连接的边。如此得到的图称为“图 G 关于 v_r 的收缩图”,记为 $G\circ v_r$。

5.2 图的连通性

5.2.1 图的分割

1. 割点

若图 G 中将某节点 v“分割”为两个节点 v_1, v_2，同时把所有以 v 为端点的边以至少一种方式改为以 v_1 或者 v_2 为端点的边，使原连通图 G 变为非连通，或者增加了不连通图 G 中的分支数，则称 G“可分”，v 称为“割点”。

若图 G 中节点集合 $\{v\}$ 中任何一个节点的上述分割都不能使 G 变为非连通，则称 G“不可分”。

2. 桥

若在图 G 中移去某边 e，但不移去它的两个端点，使原连通图 G 变为非连通，或者增加了不连通图 G 中的分支数，则称 e 为“桥”。

3. 块

图 G 的最大不可分子图称为“块”。

不可分图的块就是自身。

4. 一些已经证明的性质[4-8]

(1)割点一定在多于一个的块中。

不是割点也不是孤立点的节点只在一个块中。

任一条边只在一个块中。

任一个圈上的各条边都属于同一个块。

(2)下面三种陈述等价：

v 是 G 的一个割点。

存在与 v 不同的两个节点 u, w，使 v 在每一条 $u-w$ 道路上。

存在一个将节点集合 $\{v\}$ 分成子集 $\overline{U}$ 和 $\overline{W}$ 的划分，使得对任意两点 $u \in \overline{U}$ 和 $w \in \overline{W}$，节点 v 在每一条 $u-w$ 道路上。

(3) 下面四种陈述等价：

e 是 G 的一座桥。

e 不在 G 的任何一个圈中。

存在 G 的节点 u, w，使 e 在每一条 $u-w$ 道路上。

存在一个将节点集合 $\{v\}$ 分成子集 $\overline{U}$ 和 $\overline{W}$ 的划分，使得对任意两点 $u \in \overline{U}$ 和 $w \in \overline{W}$，e 在每一条 $u-w$ 道路上。

(4) 当 G 是含至少三个节点的连通图时，下面七种陈述等价：

G 是一个块。

G 的任何两个节点在一个公共的圈中。

G 的任何一个节点和任何一条边在一个公共的圈中。

G 的任何两条边在一个公共的圈中。

给定 G 的两个不同节点和一条边,存在一条道路,连接这两个节点且包含这条边。

给定 G 的三个不同节点,存在一条道路,连接其中两个节点(以它们为端点)且包含第三个节点。

给定 G 的三个不同节点,存在一条道路,连接其中两个节点(以它们为端点)且不包含第三个节点。

5.2.2 连通度

1. 点连通度

连通图 G 的点连通度定义为产生它的不连通分支所需“分割”的最少节点数。

表述为:$K(G)=\min\{|v_r|\}$,其中$|v_r|$表示所需“分割”的节点数。

若 G 是 n 阶完全图,则 $K(G)=n-1$。

不连通图 G 的点连通度为零。

2. 边连通度

连通图 G 的边连通度定义为产生它的不连通分支所需移去的最少边数。

表述为:$\lambda(G)=\min\{|E_r|\}$,其中$|E_r|$表示所需边的边数。

若 G 是完全图,则不能用移去边产生不连通分支,这时规定边连通度为零。

5.2.3 割集

当 G 是含至少三个节点的连通图时,若存在一个节点集合$\{v\}$的真子集,使 G 与这个子集的差集不连通,则称此子集为 G 的“点割集”。

最小点割集中的节点数就是 G 的点连通度。

当 G 是含至少三个节点的连通图时,若存在一个边集合$\{E\}$的真子集,使 G 与这个子集的差集不连通,则称此子集为 G 的“边割集”。

最小边割集中的边数就是 G 的边连通度。

5.3 树 图

5.3.1 树的基本性质

1. 若 $G=(V, E)$是一棵树,且$|V|\geqslant 2$($|V|$表示节点总数),则 G 中至少有

两个“悬挂点”(只有一条邻边的节点)。

2. 树中总有$|E| = |V| - 1$($|E|$表示边总数)。

3. 树是连通图,但移去任意一条边,就分成且必分成两个互不连通的连通子图。

4. 树是无圈图,但增加任意一条边(在其中任意不连接的两个节点之间加连一条边),就包含且仅包含一个圈。

5. 若图G满足上述性质3,4之一,则图G为一棵树。

6. 树图G的任意两个节点之间有且仅有一条道路。反之,满足此性质的图G必是一棵树。

5.3.2 图的支撑树

1. 若图$G,H = (V, E)$,且$V(H) = V(G)$(节点全同),$E(H) \subset E(G)$(H的边集是G的边集的真子集),则称H是G的“支撑子图”(生成子图)。

2. 若H是G的支撑子图,又是一棵树,称H是G的一棵“支撑树”(生成树)。

3. 图G有支撑树的充要条件是G为连通图。

4. 若$G = (V, E)$中,$w(e)$是边e上定义的非负函数,称$w(e)$为边e的“权”,则可定义G的一棵支撑树$H = (V, E')$的权为:$w(H) = \sum_{e \in E'} w(e)$。

5. 若H^*是G的支撑树H中的一棵,且$w(H^*) = \min\{w(H)\}$,则称H^*是G的“最小支撑树”。

6. 最小支撑树的克鲁斯克尔(Kruskal)算法(已经有正确性的解析证明,参见文献[4-8]):

(1)在G的边集中选e_1,使得$w(e_1)$最小。如此进行。

(2)在任一步中,若已经选好$e_1, e_2, \cdots, e_k$,则从$E - \{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$中选$e_{k+1}$,使得:① 由$e_1, e_2, \cdots, e_{k+1}$构成的支撑子图无圈;② $w(e_{k+1})$是满足①条件的边中最小的边权。

(3) 当第(2)步不能再进行时,停止。

5.4 最短道路问题

本节简介含权图最短道路问题(求图G中始点u_0到终点v_0的一条道路μ,使得“道路权”$w(\mu) = \sum_{e \in \mu} w(e)$最小)的得克斯特拉(Dijkstra)算法。已经有它的正确性的解析证明,而且至今为止,这个算法仍旧被认为是最好算法之一,而且广泛应用。图5.11显示了这个算法的框图。

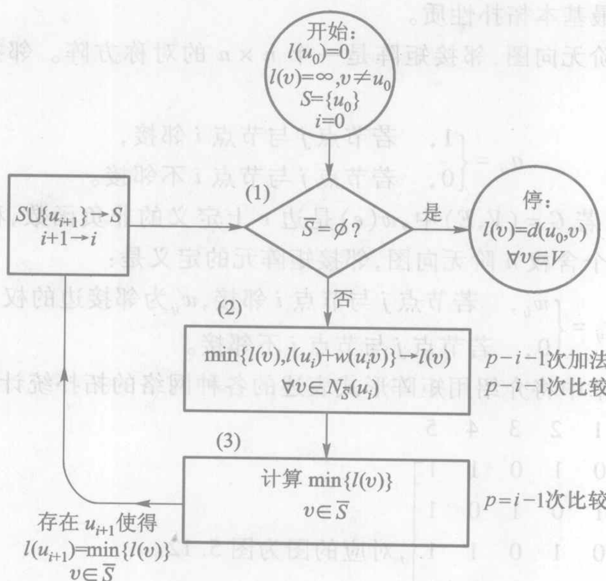


图 5.11 得克斯特拉算法的框图(引自文献[5])

算法简述:

1. 给始点 u_0 一个标号 $l(u_0)=0$,对所有 $v\neq u_0$,令 $l(v)=\infty$。步数 $i=0$,有标号集合为 $S_0=\{u_0\}$。

2. 在第 i 步结束时,若已经选好的标号节点集合为 $S_i=\{u_i\}$,令 $l(u)=d(u_0,u)$(即令始点 u_0 到 u 的距离为 u 的标号)。如果用 $\overline{S}_i$ 表示尚未选好的标号节点集合,用 $N_{\overline{S}_i}(u_i)$表示每一个这类标号节点 u_i 的邻点集合,对每一个 $v\in N_{\overline{S}_i}(u_i)$,用 $\min\{l(v),l(u_i)+w(u_iv)\}$代替 $l(v)$。这里 $w(u_iv)$表示 u_i,v 两点之间连边的边权。如果 $l(v)$取值 $l(u_i)+w(u_iv)$,则计算 $\min\limits_{v\in\overline{S}_i}\{l(v)\}$,并把具有最小值的节点记为 u_{i+1},且置换 $S_{i+1}=S_i\cup\{u_{i+1}\}$。

3. 若 $i=p(G)-2$,停止。否则用 $i+1$ 代替 i,转入第 2 步。

5.5 图的矩阵描述

具有现代计算机,使用矩阵对图或者网络进行描述是非常合适的。用矩阵形式表述各种网络的拓扑统计性质,非常有利于编程的规范性和简洁性。本节仅简介几种最重要的矩阵定义。

5.5.1 邻接矩阵

邻接矩阵 **A** 是应用最广泛的矩阵。它描述各个节点之间的邻接关系,因此

包含了网络的最基本拓扑性质。

对一个 n 阶无向图,邻接矩阵是一个 $n \times n$ 的对称方阵。邻接矩阵元的定义是:

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若节点 } j \text{ 与节点 } i \text{ 邻接,}\\ 0, & \text{若节点 } j \text{ 与节点 } i \text{ 不邻接。}\end{cases} \tag{5.1}$$

如上所述,若 $G=(V,E)$ 中,$w(e)$ 是边 e 上定义的非负函数,称 $w(e)$ 为边 e 的"权"。对一个含权 n 阶无向图,邻接矩阵元的定义是:

$$w_{ij}=\begin{cases}w_{ij}, & \text{若节点 } j \text{ 与节点 } i \text{ 邻接,} w_{ij} \text{ 为邻接边的权,}\\ 0, & \text{若节点 } j \text{ 与节点 } i \text{ 不邻接。}\end{cases} \tag{5.2}$$

本书第6章中将介绍用矩阵形式表述的各种网络的拓扑统计性质。

$$\text{例:}\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&3&4&5\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}0&1&0&1&1\\1&0&1&0&1\\0&1&0&1&1\\1&0&1&0&1\\1&1&1&1&0\end{bmatrix}\end{array}\text{,对应的图为图 5.12。}$$

5.5.2 关联矩阵

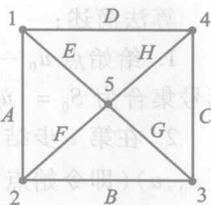


图 5.12 邻接矩阵的一个例子

关联矩阵描述各个节点和各条边之间的邻接关系,因此包含了网络的最全面拓扑性质。

关联矩阵元的定义是:

$$m_{ij}=\begin{cases}1, \text{若边 } j \text{ 与顶点 } i \text{ 联结,}\\ 0, \text{若边 } j \text{ 与顶点 } i \text{ 不联结。}\end{cases} \tag{5.3}$$

若图 G 有 p 个顶点 q 条边,则由元素 $m_{ij}(i=1,2,\cdots,p, j=1,2,\cdots,q)$ 构成一个 $p\times q$ 矩阵,称为 G 的完全关联矩阵(complete incidence matrix),记为 Me。

例:

$$Me=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{matrix}a&b&c&d&e&f\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}\text{,(行是边,列是顶点)。对应的图为图 5.13。}$$

关联矩阵的本征值:

1. 如关联矩阵 $\boldsymbol{m}$ 为 $S\times S$ 方阵,特征方程为 $|\boldsymbol{m}-\lambda\boldsymbol{I}|=0$,其中 $\boldsymbol{I}$ 表示同阶

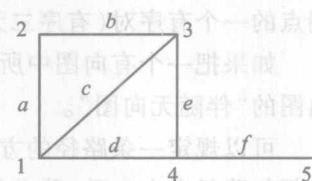


图 5.13 关联矩阵的一个例子

的单位矩阵，解出 λ 中最大一个 λ_1。

已经证明了的定理：

若图 G 无圈，则 $\lambda_1=0$。

若图 G 有圈，则 $\lambda_1 \geqslant 1$。

若图 G 有圈，并且所有的圈都在同一子圈中，则 $\lambda_1=1$，λ_1 不能取 0 到 1 之间的所有值。

2. 若图 G 的一个子图中任一个节点都有从此子图中任意另一个节点来的至少一条导入边（有向边），则称此子图为图 G 的一个"自催化集"（autocatalytic set，简称 ACS）。

已经证明：

若图 G 中无 ACS，则 $\lambda_1=0$。

若图 G 中有一个 ACS，则 $\lambda_1 \geqslant 1$。

5.5.3 圈矩阵

圈矩阵可以描述图中所有圈以及它们的边不重并所构成的圈与边的关系。

圈矩阵元定义：

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若边 } j \text{ 在圈 } i \text{ 中,}\\ 0, & \text{若边 } j \text{ 不在圈 } i \text{ 中。}\end{cases} \tag{5.4}$$

则由 $b_{ij}(i=1,2,\cdots,2^{q-p+1},j=1,2,\cdots,q)$ 构成的 $(2^{q-p+1}-1)\times q$ 矩阵称为 G 的完全圈矩阵（complete cycle matrix），记作 Be。

（已知定理：P 顶点、q 边的 G 中所有可能圈数为 $2^{q-p+1}-1$.）

例：仍旧分析图 5.13.

基本圈：$c_1=\{a,b,c\}$，$c_2=\{a,b,d,e\}$.

余下唯一的圈：$c_3=\{c,d,e\}$，可记作 $c_3=c_1\oplus c_2$。（$\oplus$ 表示环和）

圈数 $2^{q-p+1}-1=2^{6-5+1}-1=3$.

$$\text{圈矩阵}:Be=\begin{matrix} & a & b & c & d & e & f \\ c_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\end{matrix}$$

5.6 有 向 图

5.6.1 有向图及其中的路径

5.1 节已经介绍过，一个边有方向的图称为"有向图"，其中的边对应其两个

端点的一个有序对(有序二元关系)。

如果把一个有向图中所有的边都改为无向边,所得到的无向图称为原来有向图的"伴随无向图"。

可以规定一条路径的方向(一般是从始点指向终点),若路径上每条边的方向都与路径方向一致,称此路径为"单向路径"。始、终点重合的单向路径称为"单向圈"。

5.6.2　有向图中的树

若有向图 G 中一棵树 T 中存在节点 V_s,使得从 V_s 到 T 中的任一其他节点 V_i 都有且仅有一条单向路径,则称 T 为 G 的一棵"外向树",V_s 称为 T 的"始根"。

若有向图 G 中一棵树 T 中存在节点 V_t,使得从 T 中的任一其他节点 V_i 到 V_t 都有且仅有一条单向路径,则称 T 为 G 的一棵"内向树",V_s 称为 T 的"终根"。

具有始根或者终根的树都称为 G 的单向树。

5.6.3　有向图的关联矩阵

有向图的关联矩阵元定义为:

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若边 } j \text{ 与节点 } i \text{ 连接,方向背离节点 } i,\\ -1, & \text{若边 } j \text{ 与节点 } i \text{ 连接,方向指向节点 } i,\\ 0, & \text{若边 } j \text{ 与节点 } i \text{ 不邻接。}\end{cases}\tag{5.5}$$

例:$Me=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}A & B & C & D & E & F\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\end{array}$,对应的图为图 5.14。

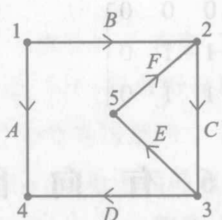


图 5.14　有向图关联矩阵的一个例子

5.7 二 分 图

5.7.1 二分图

本章第一节已经介绍过,若 $G=(V,E)$ 中,可以把节点集合 V 分割为两个互补的子集 S, $T(S\cup T=V, S\cap T=\varnothing)$,则称 G 为"二分图"(或"二部图")。

通常只讨论二分图中不同类节点之间的边。

5.7.2 匹配问题

1. 对集

(1)若二分图 G 中存在 $M\subseteq E$(即边集或者它的一个真子集),且 M 中各边彼此不邻接(即任意一个节点只连接不同类的另一个节点,以男女婚配为例,不存在一女二夫或者一男两妇),则称 M 为二分图的一个"对集"。

(2)M 中每一边的两个端点称为"M 下的配对点"。

(3)M 内部的每一边的两个端点称为"M-饱和点"。

(4)M 外部的每一边的两个端点称为"M-未饱和点"(即任意一个节点可能连接不同类的一个以上节点,也可能没有连接一个节点)。

(5)若 G 中每个节点都是 M-饱和点(对集 M 把 G 中所有节点恰好配对),则称 M 为 G 的"完美对集"。

(6)若 G 中不存在另一对集 M',使得 $|M'|>|M|$,则称 M 为 G 的"最大对集"。

(7)完美对集一定是最大对集。

2. 二分图的增长道路

(1)若 G 中的一条道路交替地属于 M 和 $E-M$,则称此道路为 M 的"交替道路"。

(2)若交替道路的始、终点都是 M-未饱和点,则称此道路为 M 的"增长道路"。

(3)已经证明:G 的一个对集为最大对集的充要条件是:G 中不存在 M 的增长道路。

5.7.3 隶属网与合作网,二分图的传统投影

二分图描述网络中的一种称为"隶属网",其中一类节点是参与某种活动、事件或者组织的"参与者",例如演员、科研人员等;而另一类节点就是它们参与的活动、事件或者组织(称为"项目"),例如影片、科学论文等。近年来,隶属网

中的"合作网络"(即任意两个节点之间的边只表示节点之间的合作关系的网络,忽略节点之间的其他关系,例如竞争、支配等)引起了分外的关注。在合作网络的研究中,由于我们常常更加关心同一类节点之间的合作相互作用关系,例如演员之间在演出中的合作关系、科研人员之间在写作论文中的合作关系等,常常把二分图向一类节点(常常是参与者节点)投影,得到单模式网络。这时参与每个项目的所有参与者节点之间都连有表示在此项目中合作关系的边,每个项目在投影图中表示为一个完全图,整个单模式网络成为完全图的集合。这样的一个表示项目的完全图被称为一个"项目完全子图"。如图 5.15 所示。

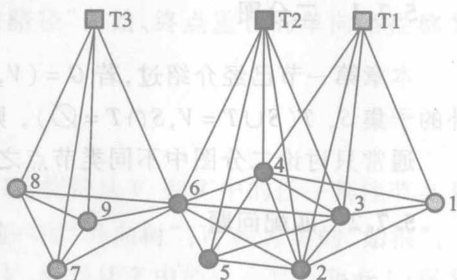


图 5.15　二分图及其投影的草图

图 5.15 显示一个描述二分图及其投影的草图。其中上排方点表示项目,下排圆点表示参与者,不同类节点之间的边属于二分图,同类之间的边属于向参与者的投影图。每一条投影图中的边是相应的两条二分图边向下投影形成的。一般不考虑多重边或表示重复次数的边权。

5.8 网络流

5.8.1　分离两个节点的割集和半割集

1. 分离两个节点的割集

(1)分离两个指定节点 v_1,v_2 的割集定义为连通图 G 的一个边集,从 G 中删去这个边集将断开从 v_1 到 v_2 之间的所有路径,使得 v_1,v_2 分别包含在 G 的两个不同的不连通子图中。

(2)将连通图 G 的节点集 V 分为两个非空、互补子集 k 和 $\bar{k}$,使得 $k\cup\bar{k}=V$, $k\cap\bar{k}=\varnothing$。若 $v_1\in k,v_2\in\bar{k}$,且用$[k,\bar{k}]$表示所有以 k 中节点为起点,以 $\bar{k}$ 中节点为终点的边的集合,则称$[k,k]$为分离任意两个节点 $v_1\in k,v_2\in k$ 的割集。

2. 在有向图 G 中$[k,\bar{k}]$和$[\bar{k},k]$是不同的边集。若 $v_1\in k,v_2\in\bar{k},S_{12}=(k,\bar{k})\cup(\bar{k},k)=[k,\bar{k}]$为 G 中分离节点 v_1,v_2 的割集,则称 $S_{12}'=(k,k)$和 $S_{21}'=(\bar{k},k)$为 S_{12} 的"半割集",且有

移去 S_{12}'中所有边,将断开所有从 v_1 到 v_2 的道路;

移去 S_{21}'中所有边,将断开所有从 v_2 到 v_1 的道路。

5.8.2 含边权网中的网络流

1. 网络流的源和汇

若含边权有向图 G 中存在一个真子集 X,其中每个节点的入度皆为零,则称 X 中任一节点为 G 中的一个"源点";若 G 中存在一个真子集 Y,其中每个节点的出度皆为零,则称 Y 中任一节点为 G 中的一个"汇点"。G 中非源又非汇的节点称为"中间节点",它们的集合记为 I。

2. 网络流

(1)若有向图 G 中的一个边集 $S\subseteq E$ 上可定义一个非负整数值边权函数 $f(S)=\sum_{e\in S}f(e)$,则对于任一个节点集 $k\subset V$,定义 $f^{+}(k)=f(k,\bar{k})=\sum_{e\in(k,\bar{k})}f(e)$,$f^{-}(k)=f(\bar{k},k)=\sum_{e\in(\bar{k},k)}f(e)$。

(2)当 $k\subset V$ 仅包含一个节点 v 时,将($\{v\},\{\bar{v}\}$)(其中 $\{\bar{v}\}$ 表示图 G 中除了 v 之外的所有其他节点)记为 $(v,\bar{v})$,有 $f^{+}(v)=f(v,\bar{v})$,$f^{-}(v)=f(\bar{v},v)$。

(3)若上述边权函数满足:

① 对所有 $e\in E$,有"容量约束条件":$0\leqslant f(e)\leqslant c(e)$,其中 $c(e)$ 是一个极限值。

② 对所有中间节点 v 有"流守恒条件":$f^{-}(v)=f^{+}(v)$。

则称 f 是有向图 G 中的一个"流"。

(4)若 $k\subset V$,则称 $f^{+}(k)-f^{-}(k)$ 为流出 k 的"合成流";$f^{-}(k)-f^{+}(k)$ 为流入 k 的合成流;$F(f)=f^{+}(X)-f^{-}(X)=f^{-}(Y)-f^{+}(Y)$ 为网络流的值。

5.8.3 含边权网中的最大流与最小割

1. 最大流

若有向图 G 中不存在 f' 使得 $F(f')>F(f)$,则称 f 为 G 中的"最大流"。

2. 多源多汇网转化为单源单汇网

在多源多汇网 G 中增加两个新节点 s 和 t,构成一个新的图 G',用权容量为 $c(e)=\infty$ 的有向边把 G 中 Y 集合中每个汇点与 G' 中的新(单)汇点 t 连接(指向 t);类似地,用权容量为 $c(e)=\infty$ 的有向边把 G' 中的新(单)源点 s 与 G 中 X 集合中每个源点连接(指向 X 集合中每个源点)。在图论中已经证明:当 e 为 G 中一条边时,有 $f'(e)=f(e)$;当 $e=(s,v)$ 时,有 $f'(e)=f^{+}(v)-f^{-}(v)$;当 $e=(v,t)$ 时,有 $f'(e)=f^{-}(v)-f^{+}(v)$。也就是 G' 中的单源单汇完全代替了 G 中的多源多汇。因此可以不失一般性地仅考虑单源单汇的网络流。

3. 最大流最小割定理

若 $k\subset V,s\in k,t\in\bar{k},S_{st}=[k,\bar{k}]=S'_{st}\cup S''_{ts}$(其中 $S'_{st}=(k,\bar{k}),S'_{ts}=(\bar{k},k)$,且

$c[S_{st}'']=\sum_{e\in S_{st}'}c(e)$ 为半割集 $S_{st}'=(k,\bar{k})$ 中各边容量之和，则图论中已经证明：

(1) G 中任一半割集 $S=(k,\bar{k})$ 上有任一网络流满足 $F(f)=f^{+}(k)-f^{-}(k)$。

(2) G 中任一半割集 $S=(k,\bar{k})$　$(s\in k,t\in \bar{k})$ 上有：任一网络流满足 $F(f)\leqslant c(S)$。

若 G 中存在一半割集 $S^{*}=(k,\bar{k})$，割集 $[k,\bar{k}]$ 分离源 s 和汇 t，且 S^{*} 的容量 $c(S^{*})$ 在所有半割集中最小，称 S^{*} 为"最小半割集"。

(3) 若 G 中半割集 $S=(k,\bar{k})$　$(s\in k,t\in \bar{k})$ 上的网络流满足 $F(f)=c(S)$，则 f 是最大流，S 是最小半割集。

(4) G 中 f 是最大流的充要条件是它不含"f-可增路径"。

f-可增路径：①当 e 与有向路径 p 方向一致，定义 $\Psi(e)=c(e)-f(e)$；②当 e 与有向路径 p 方向相反，定义 $\Psi(e)=f(e)$；③定义 $\Psi(p)=\min_{e\in p}\Psi(e)$。定义：若 $\Psi(p)=0$，p 称为"f-饱和路径"；若 $\Psi(p)>0$，p 称为"f-未饱和路径"；若 p 是从 s 到 t 的一条"f-未饱和路径"，称它为"f-可增路径"。

(5) 含边权有向图 G 中的最大流的值等于最小半割集的容量。

(6) 含边权无向图 G 中的最大流的值等于最小割集的容量（不存在半割集的概念）。

5.8.4　流可靠度

含边权无向图 G 中单位时间内从 v_1 到 v_2 之间的传输流总量为 f_{12}，则在 T 时间内传输总量为 $F_{12}=Tf_{12}$。若边 e 在 T 时间内的一个小间隔 ΔT 中发生故障，而其余边都正常，则最大传输量为：$F_{12}(\bar{e})=T\gamma_{12}-\Delta T(\gamma_{12}-\gamma_{12}(\bar{e}))$，其中 γ_{12} 为 v_1 到 v_2 的最大流。流可靠度定义为：$\mu(\gamma_{12})=\dfrac{F_{12}(\bar{e})}{F_{12}}=1-\dfrac{\Delta T}{T}\left\{1-\dfrac{\gamma_{12}(\bar{e})}{\gamma_{12}}\right]$。

第五章参考文献

[1]　P. Erdös and A. Rényi, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., 5 (1960) 17.

[2]　D. J. Watts and S. H. Strogatz, Nature, 393 (1998) 440.

[3]　A-L. Barabasi and R. Albert, Science, 286 (1999) 509.

[4]　王朝瑞．图论．3 版．北京：北京理工大学出版社，2004.

[5]　卜月华．图论及其应用．南京：东南大学出版社，2000.

[6]　卢开澄，卢华明．图论及其应用．2 版．北京：清华大学出版社，1995.

[7]　Buckley F, Lewinter M. 图论简明教程．1 版．李慧霸，王风芹，译．北京：清华大学出版

社,2005.

[8] West D B. 图论导引. 李建中,骆吉州,译. 北京:机械工业出版社,2006.

[9] 汪小帆,李翔,陈关荣. 复杂网络理论及其应用. 北京:清华大学出版社,2006.

第六章　复杂网络的统计描述

实际网络都兼有确定和随机这两大特征,确定性的法则或特征通常隐藏在统计涨落之中,因此,对复杂网络各种性质的统计描述十分重要。虽然目前提出的大多数网络统计性质仅描述网络的拓扑性质,但是由于网络节点的连边表示它们形形色色的相互作用,所以这种统计描述也包含动力学的成分,具有非常重要的意义。

具备图论几百年的研究基础,又经过 1998 年以来飞快的发展,已经建议过的网络统计性质很多,受到相当重视的也有几十种。一般人都没有看过所有建议网络统计性质的论文。所幸考斯塔(Costa)等人 2007 年初在 Advances in Physics 上发表了一篇相当全面又选择恰当的综述文章[1]。本章主要参考这篇文献,对最重要的网络统计性质作简要的介绍。请注意我们只讨论无向图。

6.1　平均距离、谐平均距离、效率与脆弱性

在本节中我们将集中介绍描述节点之间相隔远近的统计性质。

6.1.1　测地线

测地线定义为两个节点(i,j)之间边数最少的一条道路。

测地线的边数 d_{ij}就称为 i,j 之间的距离。

如果考虑边权,则对于所谓的“相异权”,即两点之间的边权越大,它们的“亲密程度”越小的权(例如地理距离、旅行时间、道路造价等),测地线长应该定义为两个节点(i,j)之间各边权的和($d_{ij}^{w} = \sum_{l\in L} w_l$,其中 l 表示道路 L 上的一条边,w_l 表示它的边权),距离应该定义为测地线长最小的一条道路;对于所谓的“相似权”,即两点之间的边权越大,它们的“亲密程度”越大的权,例如车次、航班等,测地线长应该定义为两个节点(i,j)之间各边权倒数之和的倒数($d_{ij}^{w} = 1/(\sum_{l\in L} 1/w_l)$)。

6.1.2　平均距离

平均距离定义为网络中所有节点对它们之间测地线长的平均值,$\langle l\rangle$ =

$\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i\neq j} d_{ij}$。

这个定义容易按照上述的考虑边权规定推广到含边权的情况。

6.1.3 效率

效率定义为 $E=\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i\neq j}\frac{1}{d_{ij}}$,即两个节点之间测地线长倒数之和的平均值,表示网络平均交通的容易程度。

对含边权情况,上式中的 d_{ij} 应该代之以前面定义的 d_{ij}^{w}。在一条道路上的各边可能有些包含相似权,有些包含相异权,应该按照类似于电阻串、并联的方法计算 d_{ij}^{w}。

6.1.4 谐平均距离

定义 $\langle l\rangle=\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i\neq j} d_{ij}$ 的一个问题是:如果网络是一个不连通图(这样的实际网络很多,例如演员合作网络和科研合著网络都是高度不连通的),则不连通的节点对会使这个定义式发散。为了解决这个问题,可以定义谐平均距离为:$h=\frac{1}{E}$。

6.1.5 脆弱性

一个节点 i 的脆弱性定义为:$V_i=\frac{E-E_i}{E}$,其中 E_i 为从网络中去掉节点 i 之后的网络效率。整个网络的脆弱性定义为:$V_i=\max_i\{V_i\}$,即脆弱性最大节点的脆弱性。

本节的这些定义对于描述实际的传输(物质、信息、能量等)网络有非常大的意义。如何仅仅依赖局部信息搜索含权的最短路径(距离)、考虑堵塞时如何搜索最佳路径、如何搜索敌方网络的脆弱性最大节点以及如何保护、隐藏我方网络的脆弱性最大节点等都始终是重要的实际问题。

6.2 集群系数、圈系数、富人集团系数、集团度

在本节中我们将集中介绍描述环和完全图的统计性质。

6.2.1 集群系数(三环或者三完全图的统计描述)

集群系数描述网络中节点的邻点之间也互为邻点的比例,也就是小集团结

构的完美程度。

网络的集群系数可记为：$C=\frac{3N_\Delta}{N_3}$，其中 $N_\Delta=\sum_{k>j>i}a_{ij}a_{jk}a_{ik}$，表示网络中三角形（三环或者三完全图）的总数，$N_3=\sum_{k>j>i}(a_{ij}a_{ik}+a_{ji}a_{jk}+a_{ki}a_{kj})$，表示网络中"三元组"（即缺少一边的三角形）的总数，a_{ij} 表示网络邻接矩阵的矩阵元。目前大多数人认为网络的统计性质用邻接矩阵表示是最好选择，既清晰准确，又便于规范地编程序。

一个节点的集群系数可以定义为：$C_i=\frac{3N_\Delta(i)}{N_3(i)}$，其中 $N_\Delta(i)=\sum_{k>j}a_{ij}a_{jk}a_{ik}$，表示网络中包含节点 i 的三角形的总数，$N_3(i)=\sum_{k>j}a_{ij}a_{ik}$，表示网络中包含节点 i 的"三元组"的总数。

一个节点的集群系数也可以记为：$C_i=\frac{2l_i}{k_i(k_i-1)}$，其中 l_i 表示节点 i 的邻点之间的连边数，k_i 表示节点 i 的度，定义为节点 i 的邻边数。

则网络的集群系数也可记为：$C=\langle C_i\rangle=\frac{1}{N}\sum_i C_i$。

如果考虑边权，一个节点的集群系数可以定义为：$C_i^w=\frac{1}{s_i(k_i-1)}\sum_{(j,k)}\frac{w_{ij}+w_{ik}}{2}a_{ij}a_{jk}a_{ik}$，其中 w_{ij} 表示两个节点 (i,j) 之间边上的边权，s_i 表示节点 i 的点强度，定义为 $s_i=\sum_j w_{ij}$，即节点 i 的邻边边权之和。

含边权节点的集群系数也可以另外定义为：$\tilde{C}_i^w=\frac{2}{k_i(k_i-1)}\sum_{(j,k)}(\tilde{w}_{ij}\tilde{w}_{jk}\tilde{w}_{ik})^{1/3}$，其中 $\tilde{w}_{ij}=\frac{w_{ij}}{\max_{ij} w_{ij}}$。

6.2.2 集群系数与度的关系

定义：$C(k)=\frac{\sum_i C_i\delta_{k_ik}}{\sum_i\delta_{k_ik}}$，其中 $C(k)$ 是度为 k 的所有节点集群系数的平均值，C_i 是节点 i 的集群系数，$\delta_{k_ik}=1$，若 $k_i=k$；$\delta_{k_ik}=0$，若 $k_i\neq k$。

如果 $C(k)\propto k^{-\alpha}$，很多人认为这个规律可以说明网络存在"层次结构"，即网络可以划分为一个一个明显的层次。也可以说网络节点聚合成许多小群体，而这些小群体又在某一个层次上聚合成较大的群体，如此形成一个个分层次的群体结构（对于所谓群体和层次的严格定义我们还要在本章后面讨论）。α 称为

“层次指数”。这种思想来源于芮瓦兹(Ravasz)和巴拉巴斯(Barabasi)在2003年发表的一篇论文(文献[2]),他们在论文中建议了一个规则分形结构的网络模型,证明了当规则形状的小群体按照确定法则分层次地连接起来构成网络时,就可以保持幂函数的度分布,以及上述的集群系数与度的幂函数关系。如果研究原来的BA无标度网络模型(没有群体和层次结构),则幂函数的集群系数与度的关系就不复存在。同时,他们报道了在演员合作网、语言网、万维网和以域为节点的因特网中实证得到的集群系数与度的关系。在 $C(k)-k$ 的双对数坐标平面上,虽然这四种网络的实证数据都比较混乱,但是仍旧可以大致看出 $C(k)\propto k^{-\alpha}$ 的关系。他们还举出了以路由器为节点的因特网以及电力网的相应实证研究结果作为例子,说明在这些具有地理特征,因此不可能具有鲜明层次结构的网络中,$C(k)\propto k^{-\alpha}$ 的关系不再近似成立。尽管他们的这些论述不能看作是一个严格的论证,但是仍有不容忽视的合理性。无标度网络的拓扑结构关键是含有不同层次上的“枢纽”点,它们具有不同的高连接度。如果网络是分为集团的,那么这些枢纽点一定连接了更多的集团。由于集团内部连接更为紧密,而集团之间连接相对稀疏,枢纽点一定具有比较小的集群系数。所以在有集团、层次结构的无标度网络中,表明节点平均集群系数随节点度下降的 $C(k)\propto k^{-\alpha}$ 规律应该是合理的。在文献[2]发表之后,报道了在许多实际网络中观测到的 $C(k)\propto k^{-\alpha}$ 关系,但是其中大部分的实证数据也都比较混乱,没有达到比较高的可信度。由于篇幅限制,本书不再一一介绍。

6.2.3 圈系数

定义节点 i 的圈系数为 $\Theta_i=\dfrac{2}{k_i(k_i-1)}\sum\limits_{(j,k)}\dfrac{1}{S_{ijk}}a_{ij}a_{ik}$,其中 S_{ijk} 表示经过节点 i,j,k 的最小圈所含的边数(若节点 j,k 邻接,S_{ijk} 为3,若节点 i,j,k 不由任何一个圈连接,$S_{ijk}=\infty$),$\dfrac{2}{k_i(k_i-1)}$ 表示经过节点 i 的可能圈数。圈系数大致表示经过节点 i 的圈多少,但是圈越大,对圈系数的贡献越小。

定义整个网的圈系数为 $\Theta_i=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i}\Theta_i$,其中 N 表示网络节点总数。

6.2.4 富人集团系数

定义网络的富人集团系数为 $\Phi(k)=\dfrac{1}{|R(k)|(|R(k)|-1)}\sum\limits_{i,j\in R(k)}a_{ij}$,其中度大于 k 的节点集合(富人集团)表示为 $R(k)=\{v\in N(G)|_{k_v>k}\}$,$|R(k)|$ 表示这种集合的数目,求和项表示这种集合中互相邻接的节点数目的2倍,富人集团系数 $\Phi(k)$ 表示度大于 k 的节点集合中互相邻接的节点比例。

含权网络的富人集团系数定义为 $\Phi^{w}(s) = \frac{\sum_{i,j\in R^{w}(s)} w_{ij}}{\sum_{i\in R^{w}(s)} s_i}$，其中 s_i 为节点 i 的点强度。

6.2.5　集团度

文献[3]把网络中的完全子图，也就是所有两个节点之间都连接一条边的子图，称为“集团”。一个 m－集团定义为一个包含 m 个节点，$m(m-1)/2$ 条边的完全子图。包含一个节点 i 的所有不同的 m－集团数目称为节点 i 的“m－集团度”。作者们建议统计实际网络中节点 m－集团度的分布，并且报道了域为节点的因特网、路由器为节点的因特网、万维网、数学科研合著网、新陈代谢网、蛋白质作用网、中国科技大学的朋友关系网中 m 从 2 到 5 的节点 m－集团度的分布。这些分布都显示为相当好的幂函数分布。

6.3　度、度分布、度相关性

度是对节点互相连接统计特性的最重要描述，也反映重要的网络演化特征。

6.3.1　度、度分布

度定义为节点的邻边数，可记为：$k_i = \sum_j a_{ij} = \sum_j a_{ji}$。

平均度定义为：$\langle k\rangle = \langle k_i\rangle = \frac{1}{N}\sum_i k_i = \frac{1}{N}\sum_{ij} a_{ij}$。

最大度定义为：$k_{\max} = \max_i k_i$。

如果考虑边权，一个节点的点强度定义为：$s_i = \sum_j w_{ij}$，其中 w_{ij} 表示两个节点 (i,j) 之间边上的边权。网络的平均点强度定义为：$\langle s\rangle = \frac{1}{N}\sum_i s_i$。

度分布 $P(k)$ 定义为任意选一个节点，它的度正好为 k 的概率。

6.3.2　度的相关性

定义：$P(k'|k) = \frac{\langle k\rangle P(k,k')}{kP(k)}$ 表示度为 k 的节点与度为 k' 的节点邻接的条件概率，其中 $P(k',k)$ 表示度为 k 的节点与度为 k' 的节点邻接的综合概率（即同时发生的概率）。

定义：$k_{nn}(k) = \sum_{k'} k'P(k'|k)$ 为“度为 k 的节点的邻点平均度”，更方便的

定义是：$k_{nn}(k) = \langle k_{nn,i}(k) \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i \in M_k} k_{nn,i}(k) = \frac{1}{N}\sum_{i \in M_k}\left(\frac{1}{k_i}\sum_{j \in N_i} a_{ij}k_j\right)$，其中 N_i 表示节点 i 的邻点集合，M_k 表示度为 k 的节点集合。如果 $k_{nn}(k) - k$ 曲线的斜率大于零，称为度正相关，说明平均来看，度大的节点趋向于和同类度大的节点连接，反之亦然；如果 $k_{nn}(k) - k$ 曲线的斜率小于零，称为度负相关，说明平均来看，度大的节点趋向于和异类度小的节点连接，反之亦然；如果 $k_{nn}(k) - k$ 曲线的斜率等于零，称为度不相关，说明平均来看，度连接完全随机，没有对邻点度的选择性。

如果考虑边权，定义：$k_{nn}^{w}(k) = \langle k_{nni}^{w}(k) \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i \in M_k} k_{nn,i}^{w}(k) = \frac{1}{N}\sum_{i \in M_k}\left(\frac{1}{s_i}\sum_{j \in N_i} a_{ij}w_{ij}k_j\right)$ 为“度为 k 的节点的含权邻点平均度”。

6.3.3 同类性

网络的同类性定义为一条边两端点度值的皮尔森系数（请参看 4.3 节）的平均值，可以记为：$r = \dfrac{M^{-1}\sum_{\Phi}\left(\prod_{i \in F(\Phi)} k_i\right) - \left(\frac{M^{-1}}{2}\sum_{\Phi}\left(\sum_{i \in F(\Phi)} k_i\right)\right)^2}{\frac{M^{-1}}{2}\sum_{\Phi}\left(\sum_{i \in F(\Phi)} k_i^2\right) - \left(\frac{M^{-1}}{2}\sum_{\Phi}\left(\sum_{i \in F(\Phi)} k_i\right)\right)^2}$，其中 $F(\Phi)$ 表示第 Φ 条边的端点集合，M 表示网络的总边数。

含边权的网络同类性定义为：$r^{\omega} = \dfrac{H^{-1}\sum_{\Phi}\left(\omega_{\Phi}\prod_{i \in F(\Phi)} k_i\right) - \left(\frac{H^{-1}}{2}\sum_{\Phi}\left(\omega_{\Phi}\sum_{i \in F(\Phi)} k_i\right)\right)^2}{\frac{H^{-1}}{2}\sum_{\Phi}\left(\omega_{\Phi}\sum_{i \in F(\Phi)} k_i^2\right) - \left(\frac{H^{-1}}{2}\sum_{\Phi}\left(\omega_{\Phi}\sum_{i \in F(\Phi)} k_i\right)\right)^2}$，其中 ω_{Φ} 表示第 Φ 个边的边权，H 表示网络中总边权数[4]。

6.4 边权网及边权的一些统计性质

无权网络仅仅给出节点相互作用存在与否的定性描述，实际网络中节点之间相互作用的强度也反映重要的性质与功能，一般需要引入边权来描述。本章将加边权的统计性质分散在各节之中，但是还有一些性质没有不含权的对应。本节介绍两种这样的性质[5]。

6.4.1 单位权

定义节点点强度与度之比为此节点的“单位权”或者“社会惯性”：$Z_i = s_i/$

k_i。它的最小值是1,对应无权情况,这时它的点强度等于它的度。边权越大,它的点强度越大于它的度,社会惯性也就越大。

6.4.2　权的差异性

定义:$Y_i = \sum_{j\in N_i}\left[\frac{w_{ij}}{s_i}\right]^2$ 表示此节点的"权差异性",其中 N_i 表示节点 i 的邻点集合。若这些邻点的权都相同,则权差异性与节点 i 的度的倒数成正比,差异性最小;若只有一条边的权不为零,其他近似为零,则 $Y_i \approx 1$,差异性最大。

通常更关心所有度为 k 的节点权差异性的平均值:$Y(k) = \frac{1}{|M_k|}\sum_{i\in M_k} Y_i$,其中 M_k 为度为 k 的节点的集合,$|M_k|$ 为这个集合中的节点数。

6.5　二分图的二分度

图论定义的二分图中,节点集合可以理想化地分割为两个互补的子群,而且边只存在于不同的群之间。虽然许多实际网络属于这样的理想二分图,也存在一些只是近似二分图的实际网络,其中存在少数同类节点之间的边。这时就需要引入一个描述二分图近似程度的统计量。

定义近似二分图的"二分度"为:$b = 1 - \frac{\sum_{i,j} a_{ij}\delta_{\theta(i),\theta(j)}}{\sum_{i,j} a_{ij}}$,其中 $\theta(i)$ 表示节点 i 所属的类别,$\delta = 1$,若 $\theta(i) = \theta(j)$;$\delta = 0$,若 $\theta(i) \neq \theta(j)$。定义式中的分数分子表示连接两个同类节点的边发生的概率,分数分母表示总边数。

二分图中的其他重要统计性质将在第10章中介绍。

6.6　中心度与中心化

中心度指采用定量方法对每个节点处于网络中心地位的程度进行刻画,从而描述整个网络是否存在核心,存在什么样的核心。

可以从不同角度定义中心度,但是不管采用什么定义,一般得到的中心节点都具有具体网络功能的特别重要性。我们在本节简介以下定义[6]。

6.6.1　度中心度

对中心程度的一个可能最简单的观点是:度最大的节点就是中心点。

由此定义:$C_D(x) = \frac{K(x)}{n-1}$,其中 $K(x)$ 表示节点 x 的度,n 表示网络节点总

数,$n-1$ 表示最大可能的邻点数。

作为例子,参看图 6.1,一个星形网(中心有一个节点,其余节点仅和它连接)的中心点的度为 $n-1$,其余节点度为 1。一个环形网(所有节点排成一个环形)所有节点的度都是 2。一个单链网两端点的度是 1,其余的度都是 2。显然星形网中心点的中心度最大,单链网两端点的中心度最小。

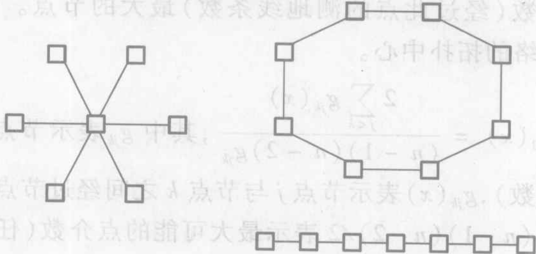


图 6.1　星形网、环形网、单链网(引自文献[6])

6.6.2　紧密中心度

第二个观点认为中心点应该是所有其他节点到此点总距离最小(总边数最少)的节点,也就是中心点应该是网络的拓扑中心,它并不一定度最大。

由此定义:$C_C(x) = \dfrac{n-1}{\sum_{y=1}^{n} d_{xy}}$,其中 d_{xy} 表示节点 y 到节点 x 的距离(测地线的长),n 表示网络节点总数,$n-1$ 表示最大可能的邻点数。

例如图 6.2(a)表示用度中心度标记的一个网络,图 6.2(b)表示用紧密中

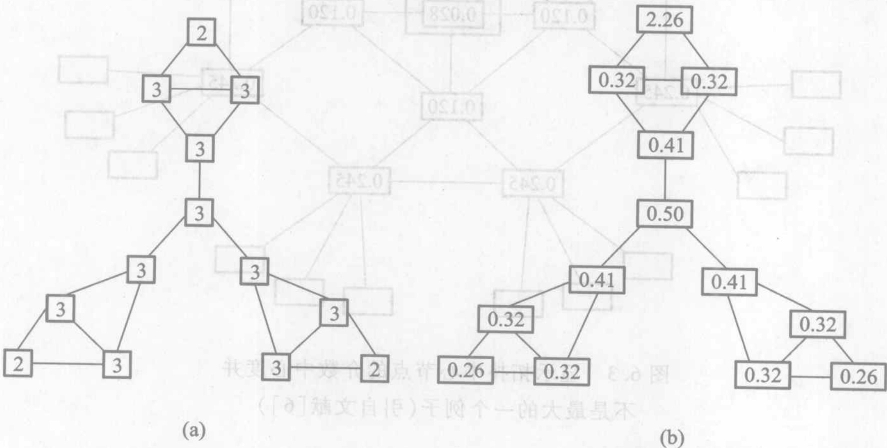


图 6.2　(a)表示用度中心度标记的一个网络,(b)表示用紧密中心度标记的同一个网络(引自文献[6])

心度标记的同一个网络。显然只有紧密中心度定量描绘了网络中节点的拓扑中心程度。

6.6.3 介数中心度

第三个观点认为中心点应该是信息、物质或能量在网络上传输时负载最重的节点,也就是介数(经过此点的测地线条数)最大的节点。它并不一定度最大,也不一定是网络的拓扑中心。

由此定义:$C_B(x) = \dfrac{2\sum\limits_{j<k} g_{jk}(x)}{(n-1)(n-2)g_{jk}}$,其中 g_{jk} 表示节点 j 与节点 k 之间的测地线条数(介数),$g_{jk}(x)$ 表示节点 j 与节点 k 之间经过节点 x 的测地线条数(节点 x 的介数),$(n-1)(n-2)/2$ 表示最大可能的点介数(任意其他两节点测地线都经过节点 x)。

以图 6.3 为例,拓扑中心节点的介数中心度仅为 0.028,并不是最大,介数中心度最大的一些节点并不是拓扑中心。

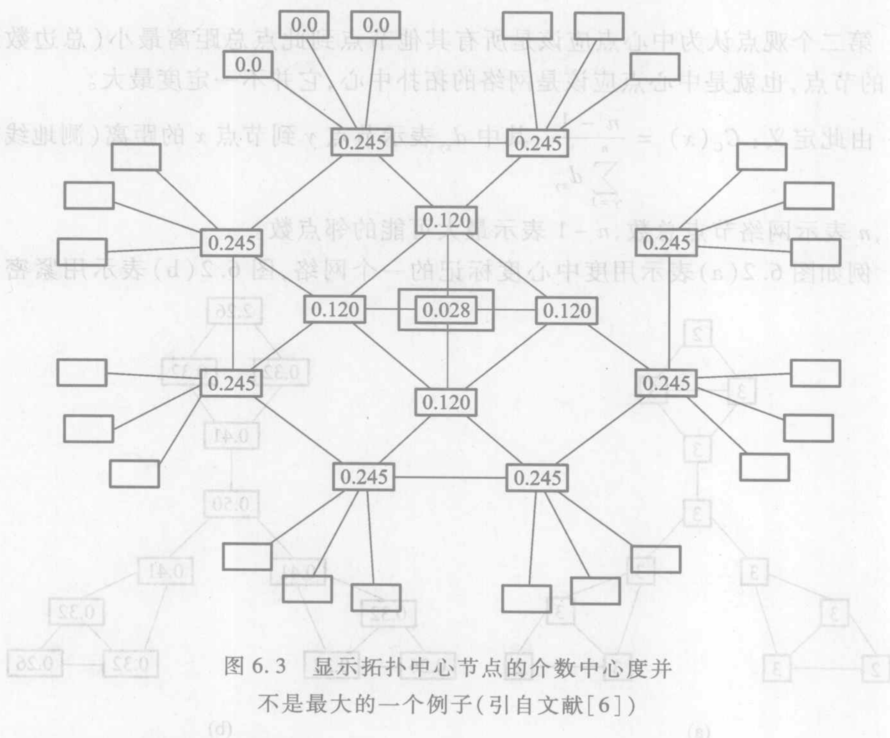


图 6.3 显示拓扑中心节点的介数中心度并不是最大的一个例子(引自文献[6])

6.6.4 流介数中心度

第四个观点认为中心点应该是信息、物质或能量在网络上传输时经过路径

最多的节点，也就是不一定只计算最短路径。这是由于实际传播常常并不走最短路径。

由此定义：$C_B(x)=\sum_{j<k}\frac{g_{jk}(x)}{g_{jk}}$，其中 g_{jk} 表示节点 j 与节点 k 之间的路径条数，$g_{jk}(x)$ 表示节点 j 与节点 k 之间经过节点 x 的路径条数。

图 6.4 对图 6.3 中的网络重新进行流介数中心度标注，显然拓扑中心节点的中心化地位得到了一定体现。

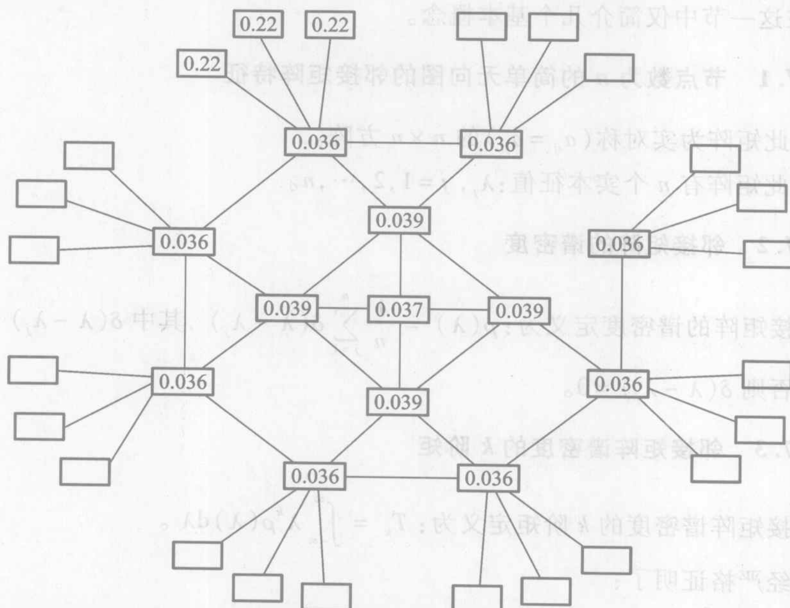


图 6.4　显示拓扑中心节点的介数中心度并不是最大的一个例子（引自文献[6]）

6.6.5　中心化

中心化操作是在根据实际需要选择或者定义中心度之后，按照中心度的大小从中间向外排列各个节点，得到一个"中心化"的网络。这可能有利于在社会网络中找出领袖、在交通网中找出瓶颈、在流行病传播网中找出危险中枢以及雪崩网络中找出危险中心环节等。

可以为此定义网络的"中心化程度"：$C_A^g=\frac{\sum_{X\in W}(C_A^*-C_A(x))}{(n-1)\max(C_A^*-C_A(x))}$，其中 W 表示网络，$C_A^*=\max_{x\in W}C_A(x)$ 表示所定义的中心度最大节点的中心度值。容易知道，若各节点的中心度都相同（无中心），$C_A^g=0$；若只有一个节点的中心度

为 1,其余节点的中心度都为零,$C_A^g=1$。也就是少数中心节点越突出,中心化程度越高;各个节点的中心度差异越小,中心化程度越低。

6.7　谱　分　析

本书 5.5 节已经强调了网络邻接矩阵的重要性。邻接矩阵的特征谱包含了网络的重要信息,有着重要应用[7,8]。我们在第 11 章还要再比较仔细地讨论谱分析,在这一节中仅简介几个基本概念。

6.7.1　节点数为 n 的简单无向图的邻接矩阵特征

1. 此矩阵为实对称($a_{ij}=a_{ji}$)的 $n\times n$ 方阵。
2. 此矩阵有 n 个实本征值:λ_j, $j=1,2,\cdots,n$。

6.7.2　邻接矩阵的谱密度

邻接矩阵的谱密度定义为:$\rho(\lambda)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\delta(\lambda-\lambda_j)$,其中 $\delta(\lambda-\lambda_j)=1$,若 $\lambda=\lambda_j$;否则 $\delta(\lambda-\lambda_j)=0$。

6.7.3　邻接矩阵谱密度的 k 阶矩

邻接矩阵谱密度的 k 阶矩定义为:$T_k=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^k\rho(\lambda)\mathrm{d}\lambda$。

已经严格证明了:

$T_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(\lambda_j)^k=\dfrac{1}{n}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^k)$,其中 $\boldsymbol{A}$ 表示邻接矩阵,$\boldsymbol{A}^k$ 表示邻接矩阵自乘 k 次得到的矩阵,$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$ 表示邻接矩阵的秩。

也已经严格证明了:

T_k/n 表示网络中从某个节点经过 $k-1$ 个中间节点回到自身的 k 边闭合回路的条数。

6.7.4　谱密度与子图中心度

1. 令 $T_k(i)=\dfrac{1}{n}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^k)=\dfrac{1}{n}(\boldsymbol{A}^k)_{ii}$,它表示经过节点 i,长为 k 边的闭合回路条数。

2. 定义子图中心度为:$C_s(i)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{T_k(i)}{k!}$,即经过节点 i 的所有闭合回路

(环)条数的加权和(k越小,权越大)。

3. 已经严格证明了,网络的子图中心度为:$\langle C_s \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} C_s(i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i}$。

已经有文献报道几个著名网络演化模型的邻接矩阵谱密度计算。其结论显示不同网络拓扑结构对应不同的邻接矩阵本征谱。对此将在第7章中介绍。

6.8 模　体

定义:模体是出现频率高的网络连通子图。

常用节点数、边数、每个节点的度都相同的随机网所产生的相应连通子图出现频率来衡量一个实际网络中这子图的出现频率是否高。

例如一个大型软件网络中的模体是重要、反复重复的子程序。

6.8.1　模体的 Z－记分

模体的 Z－记分定义为:$Z_i = \frac{N_i^{(\mathrm{real})} - \langle N_i^{(\mathrm{rand})} \rangle}{\sigma_i^{(\mathrm{rand})}}$,其中 $N_i^{(\mathrm{real})}$ 表示一个实际网络中模体 i 的出现次数,$\langle N_i^{(\mathrm{rand})} \rangle$ 表示所有节点数、边数、每个节点的度都相同的随机网所产生的相应模体出现次数的平均值,$\sigma_i^{(\mathrm{real})}$ 表示所有节点数、边数、每个节点的度都相同的随机网所产生的相应模体出现次数的平均方差。

Z－记分越大的模体在网络中越显示重要的拓扑地位。

6.8.2　模体的出众度

模体的出众度定义为:$SP_i = \frac{Z_i}{\sum_j Z_j^2}$,其中 Z_i 表示模体 i 的 Z－记分,说明相对于其他模体,模体 i 的重要性。

6.8.3　含权网中的模体性质

1. 模体 g 的强度:定义:$I_g = \left(\prod_{(i,j)\in E_g} w_{ij}\right)^{1/n_g}$,其中 E_g 表示子图 g 的边集,$n_g = |E_g|$ 表示子图 g 的边数,I_g 表示子图 g 的平均边权。

2. 模体 g 的一致性:定义:$\Psi_g = \frac{I_g n_g}{\sum_{(i,j)\in E_g} w_{ij}}$,若 w_{ij} 都相同,则 $I_g = \Psi_g = w_{ij}$ 为常

数;若 w_{ij} 的一个 w^* 特别大,以至于其他值对求和都可以忽略,则 I_g 相对也很小,$\Psi_g \approx I_g/(w_{ij}/n_g)$ 一般会更小,所以模体 g 的一致性可以表示其中权的一致性。

已经有大量实证调研结果报道,说明不同实际网络中显示不同的重要模体,而且都对应重要的实际意义。我们不作详细介绍。

6.9　群落、派系与层次

社会网络通常都显示一群一群的结构,所谓"物以类聚,人以群分"。社会网络研究从来重视群落(也翻译为社团、凝聚子群等)的概念。与此相关的层次、派系也是重要的概念。这些概念在目前的复杂网络(包括大量的非社会网络)研究中同样受到重视。但是,迄今为止,仍缺乏得到普遍承认和采用的关于群落和层次的定量定义,对派系也有不同的定义。

6.9.1　群落

1. 定义

社会网络研究中通用的群落定义是"群落是满足如下条件的一个参与者子集,其中参与者之间具有相对较强、较直接、较紧密、较经常、较积极的关系"[9-11]。

目前复杂网络中比较广泛应用的群落定义仍旧是类似的,例如:群落是内部连接密集、对外连接稀疏的节点集团。

曾经有人提出过一些定量的定义,但是没有被广泛采用。

2. 划分

大家更感兴趣的似乎不是如何定量定义群落,而是如何在一个实际网络中最合理地划分群落。对此的研究结果非常多。解绉、汪小帆的综述文章[12]比较全面地总结了这个方向的研究动向和成就。其中所引用的论文中,影响最大的可能要算纽曼(Newman)[13-15]和 Palla 等人[16]的论文。划分群落的算法可以分为凝聚法和分裂法这两大类。凝聚法的基本思想是计算各节点对之间的某种"相似性",然后从相似性最高的节点对开始添加边。相反的,在分裂算法中,一般试图找到已连接的相似性最低的节点对,然后移除连接它们的边。纽曼的一组论文中提出了划分群落的一系列重要算法,包括凝聚法和分裂法[12]。他提出的、著名的 G-N 算法是一种分裂方法,其基本思想是通过不断地从网络中移除介数最大的边,从而将整个网络分解为各个层次的群落。这个思想无疑是合理的,然而,这种分解要进行到哪一步终止,在哪一步会得到哪一个层次的群落,这是问题的关键。

为解决这个问题，纽曼等人引进了一个衡量划分质量的量——模块度，定义为 $Q=\sum_i\left(e_{ii}-\left(\sum_j e_{ij}\right)^2\right)=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{E}-\|\boldsymbol{E}^2\|$。当打算将网络划分为 k 个群落时，其中 $\boldsymbol{E}(e_{ij})$ 表示一个 $k\times k$ 维的对称矩阵，矩阵元 e_{ij} 表示连接两个不同群落（第 i 个和第 j 个）中节点的边在所有边中所占比例；矩阵中对角线上各元素（表示同一群落（第 i 个）中的边所占比例）之和为 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{E}=\sum_i e_{ii}$。$Q\to 0$ 表示群落内外连边情况在统计意义上相同，分不出清楚的群落；$Q=1$ 表示可以划分出 k 个完全清晰，即不连通的群落。用 G－N 算法每分解一步，就对该截取位置对应的网络群落结构计算 Q，当得到它的局部峰值时，即对应一个层次上比较好的群落划分。

这样划分的结果相当于把网络“映射”为一个社会网络研究中所谓的“柱状图”(dendrogram)，如图 6.5 所示。这种图是一种树图，树叶就是节点，而树枝连接这些节点，或者在更高的层次上，连接节点的群落。如果能成功地、符合实际地完成这种映射，就能成功地划分出网络的各个群落，同时清晰地显示网络的层次结构。

Palla 等人的论文[16]最早指出：在相当多的网络中，群落强烈地相互交连，以至于用类似的映射为柱状图的方法不能划分它们。他们建议借助派系的概念。在传统的社会网络研究中，派系指“至少包括三个节点的最大完备子图”[9]，也就是说派系中的任意两个节点之间都是边连接的，而且派系之外不存在另外的、同样连接这个派系中所有参与者的节点。Palla 等人[16]定义一个含 k 个节点的派系为一个“k－派系”。如果两个 k－派系共用 $k-1$ 个节点，称它们“相邻”。如果一个 k－派系可以通过若干个相邻的 k－派系到达另一个 k－派系，就称前后这两个 k－派系为彼此连通的。Palla 等人建议把所有彼此连通的 k－派系构成的集合定义为一个 k－派系群落。在这些定义的基础上，Palla 等人建议了寻找派系，然后确定 k－派系群落的算法，并且编写了相应的命名为 C－Finder 的程序。

3. 节点在群落中地位的描述

（1）节点的“群落内度”的 Z 记分

定义节点 i 的群落内度的 Z 记分为：$Z_i=\dfrac{q_i-\bar{q}_{S_i}}{\sigma_{q_{S_i}}}$，其中 q_i 表示 S_i 群落中一个节点 i 与同群落中其他节点连边数；$\bar{q}_{S_i}$ 表示 S_i 群落中所有节点 q_i 的平均值；$\sigma_{q_{S_i}}$ 表示 S_i 群落中所有节点 q_i 的方差。

若 $Z_i=0$，则称节点 i 为平庸节点；若 $Z_i<0$ 则称节点 i 为低能节点；若 $Z_i>0$ 则称节点 i 为高能节点；

（2）节点的“群落参与系数”

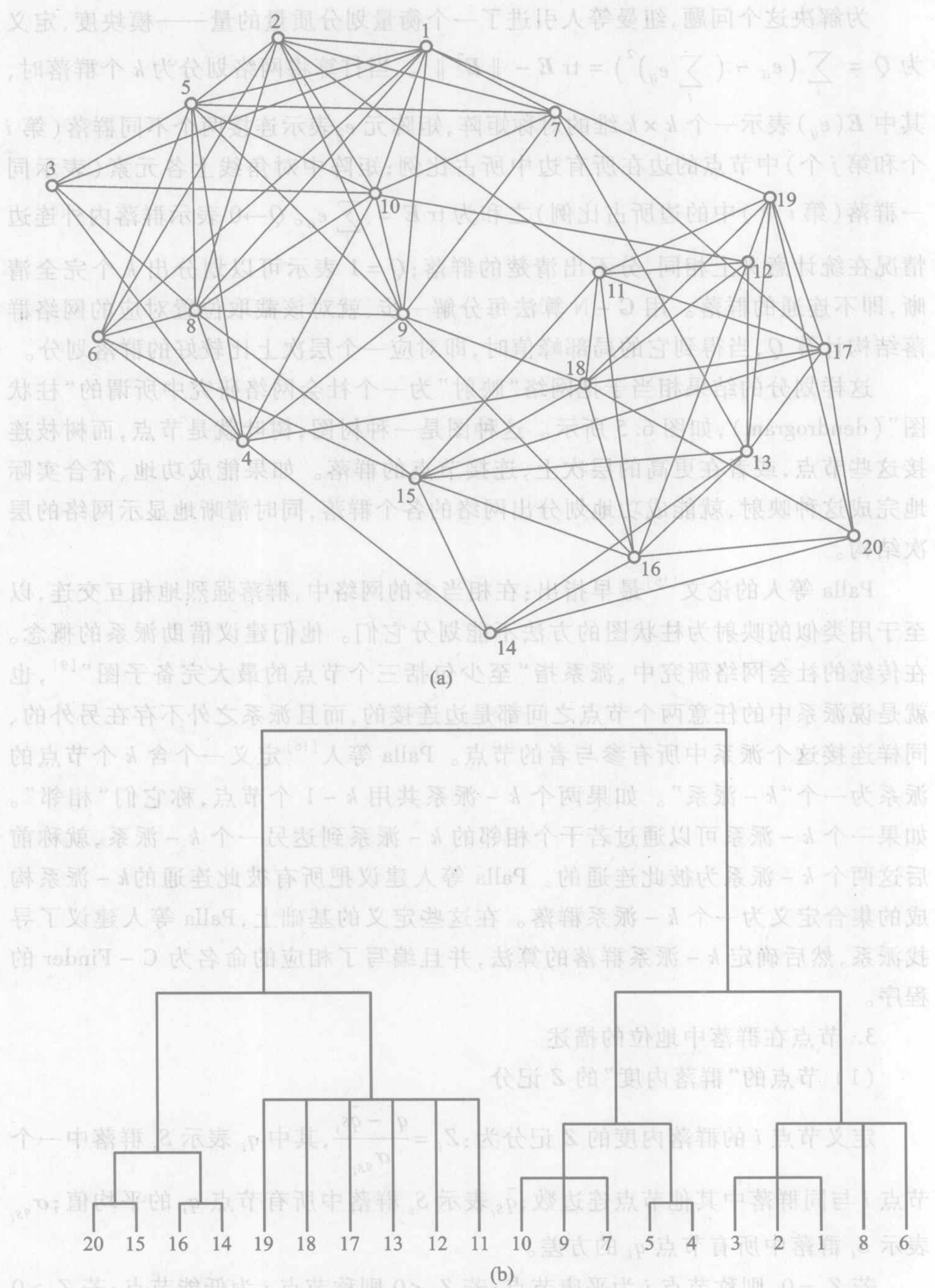


图 6.5 (a)一个简单的网络,(b)相应的柱状图(引自文献[17])

节点的群落参与系数定义为：$P_i = 1 - \sum_{S=1}^{N_S}\left(\frac{q_{iS}}{k_i}\right)^2$，其中 q_{iS} 表示从节点 i 到某一个 S 群落的边数；k_i 表示节点 i 的度；N_S 表示群落的总数。

若节点 i 的所有边都在自己的群落内，$P_i = 0$；若节点 i 的边在所有群落内均匀分布，$P_i \to 1$。

6.9.2 层次

如上所述，层次的定义常常和群落的定义紧密联系。也可以仅仅研究层次。有关层次的研究论文相当不少，但是大部分论文都把层次作为一个大家可以直觉地接受的定性概念来处理，没有给出定量的定义。少数比较定量地定义层次的文献并没有引起广泛的注意。

作为例子，一个可能的定义如下。如果 g 为一个网络 G 中的一个子图，$\bar{g}$ 为它的补集，即 $N(\bar{g}) = N(G) \setminus N(g)$，则定义：

1. g 的“膨胀集”$\delta(g)$ 为 g 中节点和它们的邻点的集合。
2. g 的“浸蚀集”$\varepsilon(g)$ 为 $\delta(\bar{g})$ 的补集。
3. g 的“d－膨胀集”为 $\delta_d(g) = \delta(\delta(\cdots(g)\cdots))$（膨胀 d 次）。
4. g 的“d－浸蚀集”为 $\varepsilon_d(g) = \varepsilon(\varepsilon(\cdots(g)\cdots))$（浸蚀 d 次）。
5. g 的“d－环”为它的相邻两次膨胀集的差集。
6. d 就称为层次，连接 g 的相邻两次膨胀环（d－环和 $d+1$－环）的边数称为 g 的“层次度”。

本节中没有注明出处的定量论述都引自文献[1]。

6.10 度分布熵、目标熵以及不同的网络信息熵

熵是十分有用而且发人深思的热力学概念。本书 1.1 节以对这个概念的回顾开始本书的议论。许多年来，熵的概念被推广到许多其他领域，转化为许多新鲜的意思，但是万变不离其宗，熵作为无序性的量度这个基本含义始终没有变化。在复杂网络研究中，也有人提出了一些有用的熵概念。本节予以简略介绍。

6.10.1 度分布熵

度分布熵定义为：$H = -\sum_k P(k)\lg P(k)$，其中 k 为节点度的一个取值，$P(k)$ 表示这个取值发生的概率。对比热力学中传统的熵概念，度分布熵相当于把每个节点度的取值看作一个“微观状态”，把这个取值发生的概率看作这个“微观状态数”，来计算熵。因此，度分布熵表示网络度分布的无序性，也就是对

于所谓的“网络异质性”的一种“宏观”描述。

度分布熵的最小值对应于规则网，这时的最简单情况是所有节点的度都相同，也就是 $P(k)=1$，若 $k=k_i$；$P(k)=0$，若 $k\neq k_i$（例如平面上规则二维格子的每个交叉点的度都是4），这时显然有：$H=H_{\min}=0$。规则网中也可能有几个可能的度取值，这时的运算类似。

度分布熵的最大值对应于均匀的随机网，也就是存在 N 个可能的度取值，每个值发生的概率是 $P(k)=1/N$，这时有 $H=H_{\max}=-\sum_k \frac{1}{N}\lg\left(\frac{1}{N}\right)=-N\times\frac{1}{N}(-\lg N)=\lg N$。

6.10.2 目标熵

目标熵定义为：$P[p(i,b)]=\frac{1}{k_i}\prod_{j\in p(i,b)}\frac{1}{k_j-1}$，其中 k_j 为节点 j 的度，$P(i,b)$ 表示从节点 i 开始，到节点 b 终结的一条最短道路。这样定义的目标熵表示从节点 i 开始，使用随机行走方法沿着这条道路搜索到节点 b 的概率。请注意从节点 i 开始，有 k_i 个方向可以搜索，而途中每个节点 j 处，又有 k_j-1 个方向可以搜索，所以每个节点的度越大，目标熵越小。

6.10.3 搜索信息熵

参照1.2节中介绍的信息熵定义和意义，搜索信息熵定义为：$s(i,b)=-\log_2\sum_{\{p(i,b)\}}P[p(i,b)]$，其中 $P[p(i,b)]$ 为上述的目标熵，求和遍及从节点 i 开始，到节点 b 终结的所有最短道路。这样定义的搜索信息熵表示从节点 i 开始，搜索到节点 b 沿的一条特定最短道路所需要的香农信息。

可以定义网络的平均搜索信息熵为：$S=\frac{1}{N}\sum_{i,b}S(i,b)$ .N 为网络的节点数。它描述在这个网上搜索的难易程度。

6.10.4 接受信息熵

接受信息熵定义为：$A_i=\frac{1}{N}\sum_b S(i,b)$，它描述从节点 i 开始搜索确定另一个节点所需要的平均香农信息。

6.10.5 隐藏信息熵

隐藏信息熵定义为：$H_b=\frac{1}{N}\sum_i S(i,b)$，它描述从任意一个节点搜索到节

点 b 所需要的平均香农信息。

显然有：$\sum_i A_i = \sum_b H_b = SN$。

6.10.6 交换信息熵

节点 i 的目标交换信息熵定义为：$J_i = -\sum_{i,j} a_{ij}C_{ij}\log_2 C_{ij}^*$，其中 a_{ij} 是邻接矩阵元，C_{ij} 表示从 j 点通过，到达目标节点 i 所需香农信息占据整个信息量之比。

节点 i 的道路交换信息熵定义为：$R_i = -\sum_{i,j} a_{ij}b_{ij}\log_2 b_{ij}$，其中 b_{ij} 表示从 j 点开始，通过节点 i 所需香农信息占据整个信息量之比。

对整个网络：$J = \frac{1}{N}\sum_i J_i$，$R = \frac{1}{N}\sum_i R_i$。

本节中没有注明出处的论述都引自文献[1]。

6.11 多标度分形的分数维谱

本书 1.5 节已经介绍过分形和分数维的概念，并且举出康托尔三分集作为例子，计算了它的分数维。20 世纪 80 年代有人提出：这样类型的，可以用一个分数维数字描述的分形是最简单的情况，实际中大多数分形都更远为复杂，需要用一系列分数维数字描述，称为多标度分形[18]。本节予以简略介绍。这些概念对网络的描述应该十分有用，但是到目前为止，有关研究报道还相当少，是一个值得开垦的研究方向。

6.11.1 康托尔三分集上的密度分布

不停地去掉一条线段的中间 1/3，剩下的就是如图 1.18 所示的康托尔三分集。现在我们考虑线段上均匀携带质量，因此需要考虑其“线密度”(即单位长度上的质量)。这是稍微复杂的情况。若在演化过程中用 n 表示“去掉中间 1/3”的操作次数，由于总的质量越来越集中在更短的一些线段上，线段密度随操作次数 n 的增加而增大。每次三分割之后都留下两段线段，第 n 次分割之后每段上的质量为 $\mu_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$，这时每段线段的长度为 $l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$(分割前整个线段长为 1)，因此有关系：$\mu_n = l_n^\alpha$，$\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$。每段的密度为：$\rho_n = \frac{\mu_n}{l_n} = \rho_0 l_n^{\alpha-1}$。$\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$称为“奇异性指数”，描述当无穷次分割后，密度发散的奇异性。

6.11.2　非均匀质量分布的康托尔三分集

线段上的质量非均匀分布才是一般情况。我们讨论一种不太复杂的情况。设每次分割之后，把分割前每段上的质量 μ_n 以概率 p 分给左段，以概率 $1-p$ 分给右段，则第 n 次分割之后，每小段上的质量不同，其中任何一段上的质量可以用通式 $\mu_n=p^k(1-p)^{n-k}$ 表示，自左至右 $k=n,n-1,\cdots,1,0$。凡是 k 相同的小段质量和密度相同，看作一个子集。质量为 $\mu_n(k)=p^k(1-p)^{n-k}$，(可以证明)其中线段条数为 $N_n(k)=\dfrac{n!}{k!\ (n-k)!}$。

令 $\xi=\dfrac{k}{n}$，则有：$\mu_n(\xi)=p^{n\xi}(1-p)^{n(1-\xi)}$，$N_n(\xi)=\dfrac{n!}{(n\xi)!\ (n-n\xi)!}$，运用斯特令公式，当 $n\to\infty$ 时，有 $n!\to\sqrt{2\pi}\,n^{n+1/2}\,e^{-n}$，上式可写为：$N_n(\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi n\xi(1-\delta)}}\exp\{-n[\xi\ln\xi+(1-\xi)\ln(1-\xi)]\}$，其中 $\delta=3^{-n}$，$n=-\dfrac{\ln\delta}{\ln 3}$。当 $n\to\infty$ 时，近似可以得到标度律：$N_n(\xi)\propto\delta^{-f(\xi)}$，其中标度指数 $f(\xi)=\dfrac{\xi\ln\xi+(1-\xi)\ln(1-\xi)}{\ln 3}$就是当 $n\to\infty$ 时这个"多标度分形(即无限分割得到的质量不同的线段子集合)"的分数维 $D(\xi)$，它不再是一个常数，而是 ξ 的函数。每个 ξ 相同的子集中的线段有相同的密度和相同的分数维数值。

6.11.3　多标度分形的分数维谱

令 $\mu_n(\xi)=\delta^\alpha$，则 $\alpha=\dfrac{\ln\mu_n(\xi)}{\ln\delta}=-\dfrac{\xi\ln p+(1-\xi)\ln(1-p)}{\ln 3}$，使用 $f(\alpha)$-α 曲线可以形象地表示分数维随子集的变化，这是更常用的分数维谱。

6.11.4　实际分形的分数维的测量

上面所说的都是理想化的"规则分形"。自然界中广泛存在的实际分形都不规则，只有统计意义上的自相似，而且自相似性只存在于一定的"标度(尺度)"范围内。

最简单、常用的实际分形分数维的测量方法是"盒子计数法"。用 N_B 个方格子(具有与实际系统相同的空间维数)来"覆盖"所描述的系统(例如用平面格子来覆盖中国地图，中国地面占据的格子数目为 N_B)，小于格子线度 l_B 的系统图形细节认为看不到。令 $l_B\to 0$，在 $\ln l_B$-$\ln N_B$ 坐标平面上找到实际数据的"线性区域，就是标度范围，此区域数据线性拟合得到的斜率就是分数维。

实际分形的多标度分数维谱的测量技巧比较复杂，本书限于篇幅不再介绍。

有兴趣的读者可以参看文献[18]。

6.12 漫谈复杂网络的统计描述

本章简介了不少网络拓扑性质的统计描述量。曾经提出过的量还有许多。这些参量从各个角度描述复杂网络的拓扑性质,似乎都是必需的。那么,一个自然的问题是:描述复杂网络拓扑性质的统计参量还必须有多少?更进一步的问题是:已经有的统计参数都必需吗?都独立吗?是否可能知道描述普遍的复杂网络需要多少个独立统计参量?它们都是什么?哪些最重要?

已经有人在深入思考这些问题,并且已经进行了相当程度的研究[1]。然而,完全回答这些问题显然不容易。我们的观点是,目前如果能进行有关上述问题的普遍研究自然很好,但是如果搞清楚大家重视的任何两种统计参量之间的相关函数关系,也是有关这些问题的扎扎实实的进展。应该说目前这两个方向的研究都比较缺乏,都需要引起大家的重视。

第六章参考文献

[1] L. Da, F. Costa, F. A. Rodrigues, G. Travieso and P. R. Villas Boas, Advances in Physics, 56(1) (2007) 167.

[2] E. Ravasz and A-L. Barabási, Phys. Rev. E, 67 (2003) 026112.

[3] W. K. Xiao, J. Ren, F. Qi, Z. W. Song, M. X. Zhu, H. F. Yang, H. Y. Jin, B. H. Wang and T. Zhou, Phys. Rev. E, 76 (2007) 037102.

[4] C. C. Leung and H. F. Chau, Physica A, 378 (2007) 591.

[5] 李梦辉,樊瑛,狄增如. 加权网络. //郭雷,等. 复杂网络. 上海:上海科技教育出版社,2006:第八章, 27-48.

[6] 王林,张婧婧. 复杂网络的中心化. 复杂系统与复杂性科学,2006,3(1):1.

[7] R. Albert and A-L. Barabási, Rev. Mod. Phys., 74 (2002) 47.

[8] 赵永毅,史定华. 复杂网络的特征谱及其应用. 复杂系统与复杂性科学,2006,3(1):1.

[9] Wasserman S, Faust K. Social Network Analysis: Methods and Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

[10] 罗家德. 社会网分析讲义. 北京:社会科学文献出版社,2005.

[11] 刘军. 社会网分析导论. 北京:社会科学文献出版社,2004.

[12] 解绉,汪小帆. 复杂网络中的社团结构. 复杂系统与复杂性科学,2005,2:1.

[13] M. E. J. Newman and M. Girvan, Phys. Rev. E, 69 (2004) 026113.

[14] M. E. J. Newman, Phys. Rev. E, 69 (2004) 066133.

[15] A. Clauset, M. E. J. Newman and C. Moore, Phys. Rev. E, 70 (2004) 066111.

[16] G. Palla, I. Derényi, I Farkas and T Vicsek, Nature, 435 (2005) 814.

[17] F. Radicchi, C. Castellano, F. Cecconi, V. Loreto and D. Parisi, PNAS, 101 (2004) 2658.

[18] 屈世显,张建华. 复杂系统的分形理论与应用. 西安:陕西人民出版社,1996.

第七章　一些网络演化模型

前面,本书用了六章篇幅介绍了进行复杂网络研究所需的一些基础知识,包括复杂性科学、统计物理学、博弈论、数理统计、图论以及网络统计性质等领域的一些相关知识的介绍。从本章开始,我们将转入对十年来复杂网络研究成就的介绍。本书只能按照作者自己的观点,挑选一部分内容来介绍。本章将从前面一再提到的两篇开创文献开始,介绍十年来关于网络演化的一些理论认识进展。

7.1　ER 随机网模型

20 世纪中叶匈牙利数学家额尔多斯(Paul Erdös)和任易(Alfred Rényi)(见本书第 2 章开始的简介)在前人研究的基础上发展的随机图论被认为是传统图论向现代网络理论发展的一个里程碑。他们带动了相当一些数学家进行随机图论研究。回忆本书第 1 章介绍的认为"随机就是复杂"的算法复杂性,读者会发现这两种研究(算法复杂性和随机图论)的理论、观点相近,都把随机描述与复杂的实际世界联系,而且正好处于同一时期,这决不能说是偶然的。很可能与算法复杂性相似,随机图论的研究热潮同样反映了研究、认识复杂系统的早期趋势。

本节只能非常简单地介绍随机图论。为了对比,我们先用一个例子来介绍规则网络的性质。

7.1.1　规则网络简介

在本书第 1 章中讨论过,传统物理学和许多其他科学早就认为我们周围的实际系统是由大量基本单元构成的,而且希望从这些基本单元的性质得到系统的动力学规律。几百年来沿用的,作为这种方法论工具之一的坐标体系假设这些基本单元位于规则空间中的格点上,而且它们之间的相互作用的方向一般都沿着连接格点的直线段。这实际上就是对实际系统的规则网络描述,只不过没有这样明确说出来而已。如果没有下面介绍的几种观点作为对照,本来也没有必要强调这种描述的网络本质。

为了和下面介绍的额尔多斯和任易的 ER 随机网络模型比较,我们用图 7.1 作为例子来讨论规则网络。这是一种最简单的规则网模型,在其中,N 个节点排

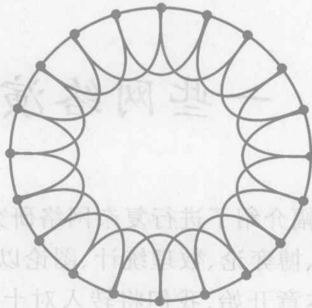


图 7.1　一种规则网的草图(引自文献[1])

列成环形(以避免边界问题),每个节点与其最邻近的 m 个节点连边(图中 $m=4$)。很容易得到这个网络的主要统计性质。

度分布:$P(k)=\begin{cases}1, & 若\ k=m\\ 0, & 若\ k\neq m\end{cases}$,即度分布是 δ 函数。平均度:$\langle k\rangle=m$,与 N 无关。

平均集群系数:$C=\dfrac{1/2\times3\times(k-2)}{1/2\times4\times(k-1)}$,对于图 7.1 有 $C=1/2$,与 N 无关。当 $k\to\infty$,$C\to3/4$。

最大距离:$l_{\max}=\dfrac{N/2}{k/2}=\dfrac{N}{k}$,平均距离:$\langle l\rangle\underset{N\to\infty}{\cong}\dfrac{l_{\max}}{2}=\dfrac{N}{2k}\propto N\to\infty$。

上述结论的定性部分,即度分布是 δ 函数,平均度与 N 无关,平均集群系数与 N 无关,最大距离和平均距离与 N 成正比,显然对规则网络普遍成立。

7.1.2　ER 随机网模型

ER 随机网模型的最简单表述为:(1)给定网络节点总数 N。(2)在每一步时间,任意选择两个节点,以概率 $p=\dfrac{2n}{N(N-1)}$ 把它们连边,其中 n 是给定的总边数($n<N(N-1)/2$),$N(N-1)/2$ 是最大可能连边数。(3)当边数达到 n 时停止演化。(4)用此模型可能生成的网络总数为 $\dbinom{N(N-1)/2}{n}$ 个,每个出现的概率相同,平均边数为 $pN(N-1)/2$ 条。如图 7.2。

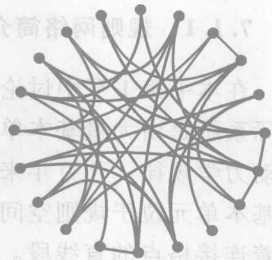


图 7.2　一种随机网的图示(引自文献[1])

这个模型可以有另一个等价的表述形式:从 N 个编号的节点出发,依次考虑每一对节点以概率 p 的连边。边数的期望值自然就是 $pN(N-1)/2$。

7.1.3 ER 随机网的最主要统计性质

类似地容易得到这个网络的最主要统计性质。

平均度：$\langle k\rangle = p(N-1) \simeq pN$，与 N 正比。度分布（ER 和 Barabas 给出了严格证明[1]）：$P(k) = C_{N-1}^{k} p^{k}(1-p)^{N-1-k} \underset{N\to\infty}{\simeq} e^{-\langle k\rangle}\frac{\langle k\rangle^{k}}{k!}$，即度分布是围绕 $\langle k\rangle$ 的泊松分布。这里虽然没有列出详细的证明过程，但是上面的表示式和泊松分布的结论很容易理解。

平均集群系数：$C = p \simeq \frac{\langle k\rangle}{N} \propto N^{-1}$（注意任意两点间连边概率都是 p，所以任意一个节点的邻点之间的连边概率也是 p），与 N 成反比。

平均距离：我们做一个近似的分析。任选一个节点，与它相距为 1 的节点（邻点）有 $pN \simeq \langle k\rangle$ 个，而每个邻点又有同样多邻点，所以与它相距为 2 的节点有 $(pN)^2 \simeq \langle k\rangle^2$ 个，与它相距为 $\langle l\rangle$ 的节点有 $(pN)^{\langle l\rangle} \simeq \langle k\rangle^{\langle l\rangle}$ 个。由于度分布是泊松的，可以近似地认为所有节点对之间距离都是 $\langle l\rangle$，即 $N \simeq \langle k\rangle^{\langle l\rangle}$，所以得到 $\langle l\rangle \simeq \frac{\ln N}{\ln\langle k\rangle} \propto \ln N$。

结论是：度分布是泊松的，平均度与 N 正比，平均集群系数与 N 反比，平均距离与 $\ln N$ 正比，显然与规则网络十分不同。

7.1.4 ER 随机网邻接矩阵的谱密度

在 6.7 节中已经介绍了网络的邻接矩阵谱密度的概念。它的定义是：$\rho(\lambda) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta(\lambda-\lambda_j)$，其中 N 是网络的节点数，λ_j 为网络邻接矩阵的 N 个实本征值中的第 j 个，δ 为 δ 函数，即当 $\lambda=\lambda_j$ 时，$\delta(\lambda-\lambda_j)=1$，否则 $\delta(\lambda-\lambda_j)=0$。满足 $p(N)=cN^{-z}$ 的随机图（p 是 ER 模型中的连边概率，c 和 z 是常数）会显示十分类似于逾渗现象的临界现象。当 $z>1$ 时，图为不连通的森林，当 $z=1$ 时，突然出现网络的全连通集团，且在 $N\to\infty$ 时包含所有节点。只考虑 $z<1$ 的情况时，随机图的邻接矩阵谱密度会在 $N\to\infty$ 时收缩到被称为“维格纳（Wigner）分布”（在量子、统计、固体物理学中有许多重要应用）的著名函数[1]：

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4Np(1-p)-\lambda^2}}{2\pi Np(1-p)}, & \text{若} \ |\lambda| < 2\sqrt{Np(1-p)}, \\ 0, & \text{其他情况。} \end{cases} \tag{7.1}$$

这个分布可以在 $\lambda/\sqrt{Np(1-p)}$-$\rho\sqrt{Np(1-p)}$ 坐标平面上表示为一个半圆，如图 7.3 所示。这是随机网络的一个关键特征。

规则网的邻接矩阵谱密度显然是跳跃状（许多 δ 函数）。

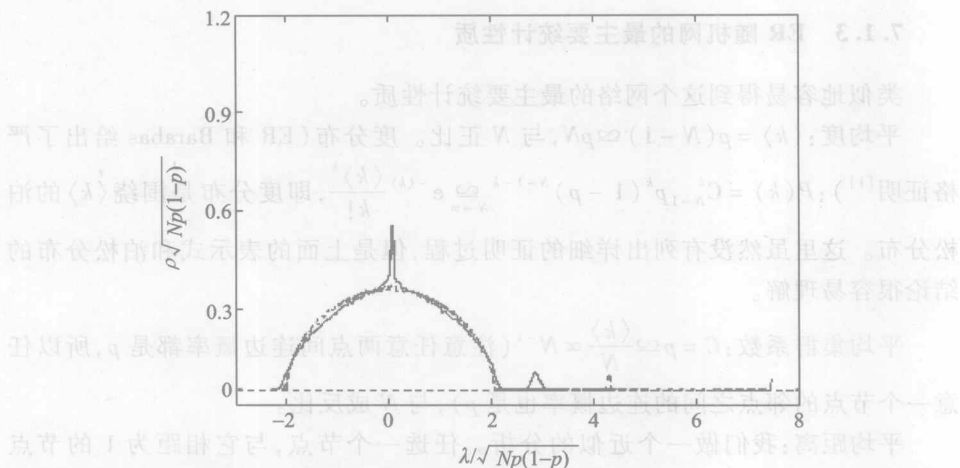


图 7.3　三幅叠放的数值模拟得到的 ER 随机图谱密度(引自文献[1])
参量为:$p=0.05$,$N=100$(实线),300(长虚线),1000(短虚线)

7.2　WS 小世界网模型

7.2.1　实际复杂网络位于规则网与随机网之间

如上所述,很可能规则网和随机网先后被当作实际系统的描述工具,然而,规则网的度分布是 δ 函数,平均度与 N 无关,平均集群系数与 N 无关,最大距离和平均距离与 N 成正比,邻接矩阵谱密度呈现跳跃状(许多 δ 函数);而随机网度分布是泊松分布,平均度与 N 成正比,平均集群系数与 N 成反比,平均距离与 $\ln N$ 成正比,邻接矩阵谱密度是维格纳分布。到底哪一个更符合实际?

文献[1]报道了一些实际系统平均距离以及平均集群系数与 N 的关系的实证调研结果。图 7.4(a)显示了万维网、因特网、电影演员合作网、科研合作网、性接触网、大肠杆菌的新陈代谢网、蛋白质相互作用网、某些局部地区的食物链网、论文引用网、电话呼叫网、英语词汇网的平均距离与 N 的关系的实证调研结果。大部分数据落在 $<l>\ln<k>\propto \ln N$ 的直线附近,只有万维网、科研合作网和美国西部电力网的数据偏差较大。这些系统都应该被认为是复杂的。这说明实际复杂系统的平均距离与 N 的关系大致符合 ER 随机网模型的结论。

图 7.4(b)显示了上述系统平均集群系数与 N 的关系的实证调研结果。如果实际复杂系统的平均集群系数与 N 的关系类似地大致符合 ER 随机网模型的结论,大部分数据应该也落在图 7.4(b)中的虚直线附近,然而,图 7.4(b)显示实际情况与此大不相同,实际数据倾向于显示平均集群系数与 N 无关。

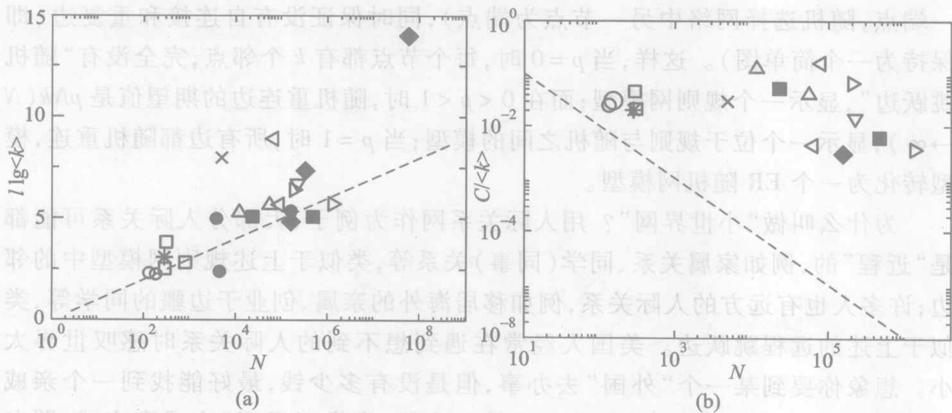


图 7.4 一些实际系统平均距离(a)和平均集群系数与N的关系(b)的实证调研结果(引自文献[1])

看来结论是:实际复杂系统在平均距离特性上类似于 ER 随机网模型,而在平均集群系数特性上类似于规则网模型。实际网络位于"规则与随机之间"。这个结论非常类似于我们在第 1 章中介绍的对复杂的理解和对复杂性定义的结论。

7.2.2 小世界网模型

位于规则与随机之间的实际复杂网络模型到底是什么样的?如何在一个简单模型中把规则与随机恰当地结合?1998 年,两位年轻的美国物理学家瓦兹(Watts)和斯绰伽兹(Strogatz)在 Nature 上发表了影响很大的论文(文献[2]),提出了他们的"小世界网络"模型,回答了这个问题,开创了网络研究的新纪元。

图 7.5 显示了瓦兹和斯绰伽兹的小世界重连边模型。它从上节所述的规则网模型开始,以概率 p 随机地"重连"每条边(任选此边的一个端点不变,脱开另

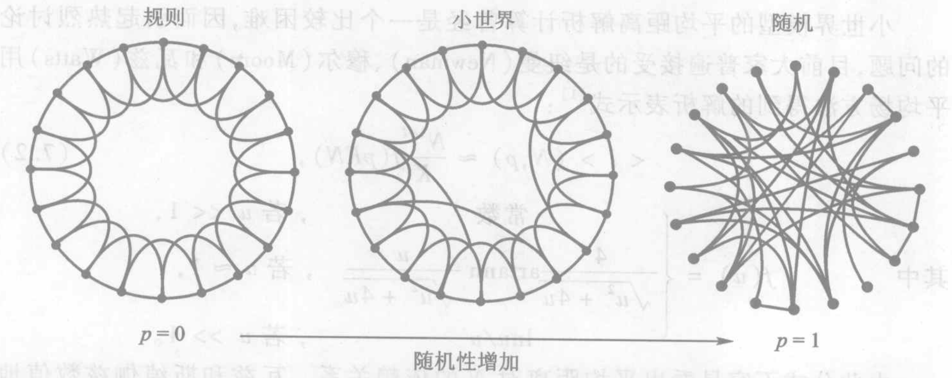


图 7.5 瓦兹和斯绰伽兹的小世界重连边模型(引自文献[2])

一端点，随机选择网络中另一节点为端点），同时保证没有自连接和重复边（即保持为一个简单图）。这样，当 $p=0$ 时，每个节点都有 k 个邻点，完全没有“随机跳跃边”，显示一个规则网模型；而在 $0<p<1$ 时，随机重连边的期望值是 pNk($N\to\infty$)，显示一个位于规则与随机之间的模型；当 $p=1$ 时，所有边都随机重连，模型转化为一个 ER 随机网模型。

为什么叫做“小世界网”？用人际关系网作为例子，大部分人际关系可能都是“近程”的，例如家属关系、同学（同事）关系等，类似于上述规则网模型中的邻边；许多人也有远方的人际关系，例如移居海外的亲属、创业于边疆的同学等，类似于上述的远程跳跃边。美国人经常在遇到想不到的人际关系时感叹世界太小。想象你要到某一个“外国”去办事，但是没有多少钱，最好能找到一个亲戚或朋友在你刚去的一段时间帮你一些忙。为此，常常不得不“亲戚套亲戚、朋友托朋友”来找到这种关系。我们常常发现原来想象的不知道要绕多大圈子才能找到（太远也就没有什么用）的关系原来并不远，目的地原来就有长时间不联系的近亲或者知己的好友，可能给你帮很大忙。此时我们可能会像美国人那样，感叹一句：“世界是多么小啊！”。

7.2.3 小世界网的最主要统计性质

$p=0$ 时，平均集群系数：$C=\dfrac{3(K-2)}{4(K-1)}$，这里我们用大写的 K 表示小世界模型对应的规则网中每个节点的常数度值。在 $0<p<1$ 时，任一个节点的两个邻点仍旧是它的邻点的概率分别都是 $(1-p)$（以概率 p 重绕，即不再连接，所以连接概率是 $(1-p)$），它们之间也邻接的概率也是 $(1-p)$，因此小世界模型的平均集群系数的期望值为[1]：$C=\dfrac{3(K-2)}{4(K-1)}(1-p)^3$，与 N 无关。当然，这只是一个近似估计。

小世界模型的平均距离解析计算曾经是一个比较困难，因而引起热烈讨论的问题，目前大家普遍接受的是纽曼（Newman）、穆尔（Moore）和瓦兹（Watts）用平均场方法得到的解析表示式[1]：

$$< l > (N,p) \approx \frac{N^{1/d}}{K} f(pKN), \tag{7.2}$$

其中

$$f(u) = \begin{cases} \text{常数}, & \text{若 } u \ll 1, \\ \dfrac{4}{\sqrt{u^2+4u}} \operatorname{artanh} \dfrac{u}{\sqrt{u^2+4u}}, & \text{若 } u \approx 1, \\ \ln u/u, & \text{若 } u \gg 1。 \end{cases}$$

由此公式不容易看出平均距离对 N 的依赖关系。瓦兹和斯绰伽兹数值地显示了平均集群系数和平均距离对 N 的依赖关系，如图 7.6 所示。

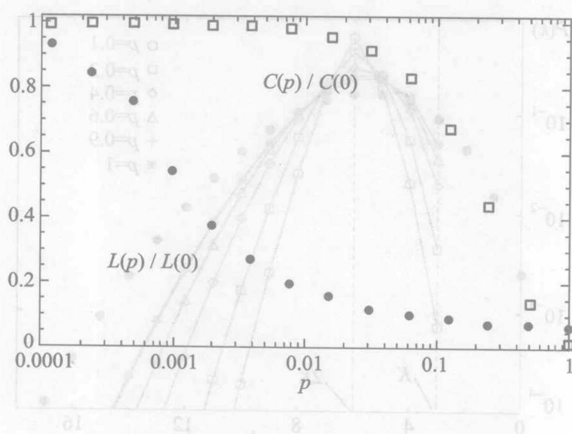


图 7.6 数值得到的小世界模型平均集群系数以及平均距离对 N 的依赖关系(引自文献[1])

图 7.6 中 $C(0)$ 和 $L(0)$ 分别表示小世界模型对应的规则网中的平均集群系数和平均距离，$C(p)$ 和 $L(p)$ 分别表示小世界模型中的平均集群系数和平均距离。图中显示当 p 从零增加时，产生的少数随机跳跃边对平均集群系数影响很小，然而却立即大大降低了平均距离。因此，在 $0<p<1$ 区域存在一个相当大的 p 的取值范围，使得小世界模型显示类似于规则网的大平均集群系数和类似于随机网的小平均距离，符合于上述的实际网络调研结果。

$p=0$ 时，小世界模型的度分布与上述规则网相同，是 δ 函数，所有节点的度都为 K。$p>0$ 时，由于每条边保留一个端点不变，重连后每点至少有 $K/2$ 条边，可以把节点 i 的度写为 $k_i=K/2+c_i$，$c_i=c_i^1+c_i^2$，其中 c_i^1 以概率 $(1-p)$ 留在原处，c_i^2 以概率 p 从其他节点重新连接到节点 i。容易理解，当 N 足够大时，这两部分的概率分布为[1]：

$$P_1(c_i^1) = \mathrm{C}_{K/2}^{c_i^1}(1-p)^{c_i^1}p^{K/2-c_i^1}, \tag{7.3}$$

$$P_2(c_i^2) = \mathrm{C}_{pNK/2}^{c_i^2}(1/N)^{c_i^2}(1-1/N)^{pNK/2-c_i^2}。 \tag{7.4}$$

由此可得：$P(k) = \sum_{n=0}^{f(k,K)} \mathrm{C}_{K/2}^{n}(1-p)^n p^{K/2-n}\dfrac{(pK/2)^{k-K/2-n}}{(k-K/2-n)!}\mathrm{e}^{-pK/2}$，其中 $f(k,K)=\min(k-K/2,K/2)$。这个度分布近似于泊松分布，如图 7.7 所示。

这说明小世界模型的度分布类似于随机图的度分布。7.3 节将说明这并不符合于实际网络的性质，小世界模型只能说明实际网络中平均集群系数和平均距离对 N 的依赖关系。

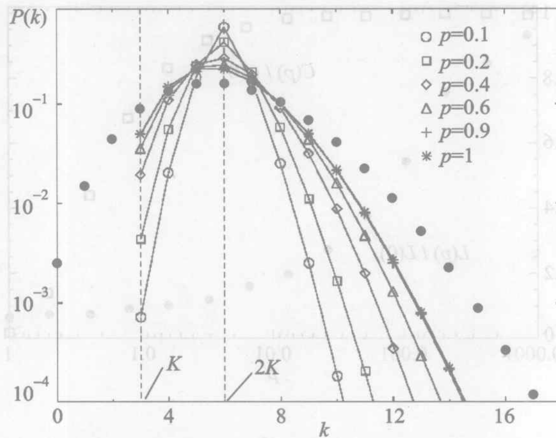


图 7.7　当 $K=3$ 时，度分布的数值模拟结果（引自文献 A. Barrat and M. Weigt, On the properties of small-world network method, Eur. Phys. J. B, 13(2000) 547 - 560）

图中各数据点为 $N=1000$ 的小世界模型数值模拟结果，各条线由上面解析度分布函数得到，实心圆点表示相同参数的随机图度分布

7.2.4　小世界网的邻接矩阵的谱密度

图 7.8 显示了数值模拟得到的小世界网模型的谱密度。可以看到随 p 增大，谱密度逐渐从规则网的跳跃状（许多 δ 函数）演化到完全随机网的半圆函数，因此小世界网模型在说明实际网络谱密度这一点上也是成功的。

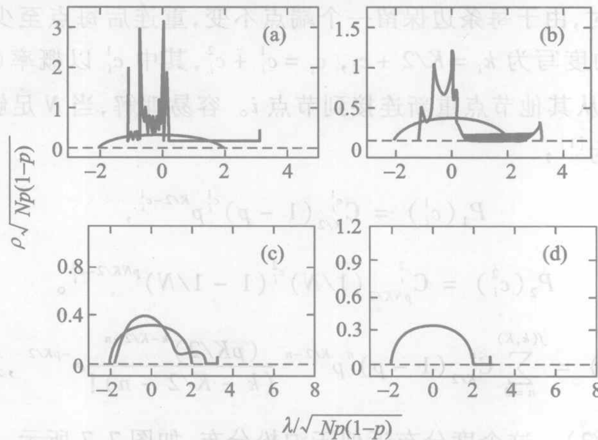


图 7.8　数值模拟得到的小世界网模型的谱密度（引自文献[1]）

各图中实线显示的半圆表示随机网的谱密度，以便比较。

(a) $p=0$；(b) $p=0.01$；(c) $p=0.3$；(d) $p=1$

7.3 BA 无标度网模型

7.3.1 实际复杂网络的异质性

小世界模型可以说是20世纪后期“复杂居于规则与随机之间”这一理解的新形势再版。然而，仔细想想这句话，可能产生不满意甚至怀疑。既然规则与随机都是简单的，那么复杂就不应该“简单地”位于它们中间，而应该在很多方面高于它们，显示各种各样规则与随机不具有的“更高级”的特性。如果是这样，那么使得实际复杂网络区别于规则和随机网络，比起它们都“更高级”的最重要的性质是什么？

回忆第6章介绍的许多网络统计性质，度分布可能被列入最令人注意的性质之中。一个网络节点直接连接邻点的多少常常表示它在网络中的重要性。例如电影演员、科研人员合作网中，节点度基本上描述了一个节点获得合作成果（影片或论文）的多少，也就是他们在合作中地位的重要程度；交通网中，节点度描述了一个节点在网中的“枢纽”程度等等。规则网的度分布是 δ 函数，即所有节点的度完全相同，或者分为有限组，每组内全同；而随机网的度分布是泊松分布，绝大部分节点的度落在一个平均值附近。这两个极端的简单网络的度分布都呈现某种“均质性”。实际复杂网络的度分布如何？比这两个极端的简单网络的度分布高级吗？这个问题是重要且有趣的。

两位年轻的美国物理学家，巴拉巴斯（Barabasi）和阿尔波特（Albert）于1999年在 Science 上发表了影响很大的论文（文献[3]），提出了他们的无标度网络模型，并举例说明许多实际网络都具有所谓的“无标度性”，即精确或近似地显示遵循幂函数的度分布。他们的工作揭示：实际复杂网络中节点重要程度的分布是强烈“异质性”的。那么，异质比均质高级吗？我们认为是这样的。均质常常意味着均匀、平衡、无序、或极端有序反而导致的平庸、简单，而异质常常意味着不均匀、非平衡、（建筑在复杂基础上的）有序。我们周围丰富多彩的世界正是无处不在的不均匀、非平衡、复杂而有序造成的。“实际复杂网络中基本单元度分布的无标度性”显示了各个基本单元的“重要性”或“作用”非常不相同。在人群中像爱因斯坦那样的优秀人物是极少数；在食物链中像狮子、老虎那样的“顶端生物”也一定是极少数。比他们多不知多少倍的“芸芸众生”远远谈不上“优秀”，但却是支撑他们的基础。这些层次、组织等特征正是复杂性的一种体现。

图7.9显示了万维网、路由器层次的因特网、电影演员合作网、高能物理学家科研合作网和神经科学家合作网的度分布，它们都精确或近似地遵循“幂律”。在文献[3]发表之后的几年中，许多文献陆续发表，报道了更多实际网络

的幂律度分布。

随之而来的问题是：为什么会有幂律度分布？或者说幂律度分布是从哪里来的？是由什么机制产生的？这是物理学家最感兴趣的话题。

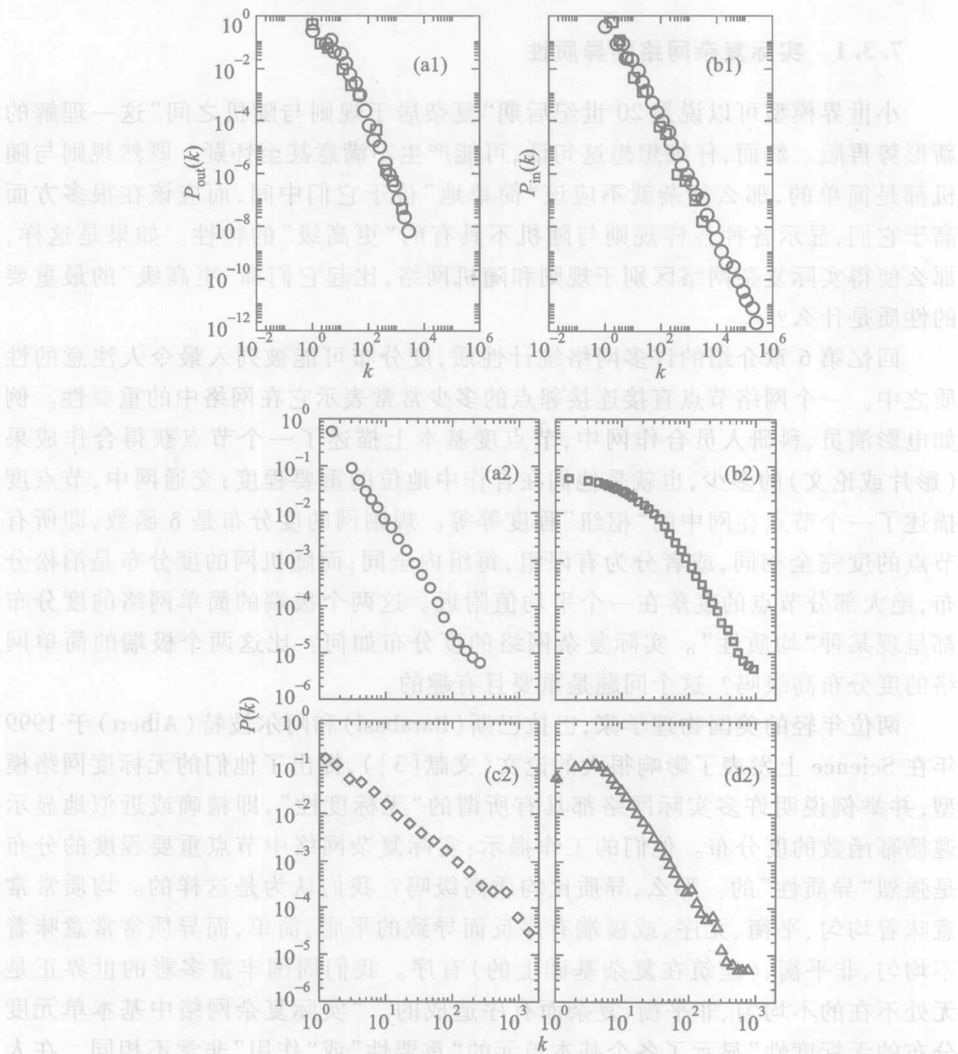


图 7.9 (a1)万维网的出度、(b1)万维网的入度分布；(a2)路由器层次的因特网、(b2)电影演员合作网、(c2)高能物理学家科研合作网、(d2)神经科学家合作网的度分布（引自文献[1]）

7.3.2 无标度网模型及其度分布的平均场解析

巴拉巴斯和阿尔波特提出的无标度网模型包括两个要素：增长和优选。前者强调复杂网络是一个开放系统，新的基本单元不断加入，节点总数在不断增加；后者强调节点连接新边的概率应该单调依赖于它已有的度，即所谓“富者更富”法则。这两条无疑是符合实际的。任何实际复杂系统一定不是理想孤立的，而已经掌握大量财富的人一定比穷人更容易赚钱。在这两条原则基础上提出的模型表述为：

1. $t=0$ 时具有较少的 m_0 个节点，以后每个时间步增加一个新节点，连接到 $m(m\leqslant m_0)$ 个旧节点上。

2. 新节点连接到旧节点 i 的概率正比于它的度，即连接概率为：$\Pi(k_i)=k_i\Big/\sum_{j=1}^{N-1}k_j$，其中 k_i 表示旧节点 i 的度，N 表示网络节点数。

3. 如此演化，直到达到一个稳定演化状态。

巴拉巴斯和阿尔波特的数值模拟说明在 t 够大时模型产生的网络会达到一个稳定演化状态，这时度分布遵循幂律。

如同本书 2.3 节所讨论的，对于一个具体细节依赖于随机因素的动力学过程，平均场方法的思想就是抛开这些具体细节，仅仅考虑全局的、平均的动力学效果。在许多情况下，可以把某些动力学现象的发生概率近似为常参量，列出微分方程形式的平均场方程。它们可以用大家熟悉的微分方程解法来求解，但是并不代表还原论方法论框架下的系统动力学机制。根据这种思想，巴拉巴斯和阿尔波特建议了无标度网络演化模型的平均场方程为：

$$\frac{\partial k_i}{\partial t}=mk_i\Big/\sum_{j=1}^{N-1}k_j。\tag{7.5}$$

考虑 t 时刻 $\sum_j k_j=2mt-m$，在 t 够大时近似有$\frac{\partial k_i}{\partial t}=\frac{k_i}{2t}$。在初条件 $k_i(t_i)=m$ 下，可解得：$k_i=m(t/t_i)^{\beta}$，$\beta=1/2$，即所有节点的度都以幂函数形式增加，但是同一时刻达到的度值不同，且在 t 够大时达到度分布遵循幂律的稳定演化状态。

令 $k_i<k$，可得$\left(\frac{t}{t_i}\right)^{\beta}<\frac{k}{m}$，以及 $P(k_i(t)<k)=P\left(t_i>\frac{m^{1/\beta}t}{k^{1/\beta}}\right)$。

注意到 $P(t_i)=1/(m_0+t)$，与 t_i 无关，由此得到：

$$P(k_i(t)<k)=P\left(t_i>\frac{m^{1/\beta}t}{k^{1/\beta}}\right)=1-\frac{m^{1/\beta}t}{k^{1/\beta}(t+m_0)},\tag{7.6}$$

代入前式，可得到：

$$p(k)=\frac{\partial P(k_i(t)<k)}{\partial k}=\frac{2m^{1/\beta}t}{(m_0+t)k^{1/\beta+1}},\tag{7.7}$$

在 t 够大时，忽略 m_0，有 $p(k) \approx 2m^{1/\beta}k^{-\gamma}$，其中 $\gamma = 1/\beta + 1 = 3$（注意 $\beta = 1/2$），即度分布遵循幂律。

如果网络照样增长，但是连接旧点是完全随机的，可以类似地列出平均场方程为：

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = \frac{m}{m_0 + t - 1}。 \tag{7.8}$$

可以类似地解出：$p(k) \propto e^{-k/m}$，即度分布遵循指数函数。

7.3.3 无标度模型的其他最主要统计性质

已经推导出无标度模型的平均距离随 N 变化遵循函数：$\langle l \rangle \approx \ln(N)/\ln\ln(N)$ [1] 。比较规则网、随机网、小世界网，随着网络尺寸 N 的增加，规则网的平均距离增加最快，无标度模型增加最慢，随机网居于中间，而小世界网又居于规则网和随机网之间。因此，如果只考虑平均距离如何随 N 变化，无标度网并不居于规则网与随机网之间。这再一次提醒我们，好的模型并不一定包罗万象，反之，它们常常针对实际系统的一个重要规律，作出阐明。

已经推导出的无标度模型的平均集群系数随网络尺寸 t 增加而变化的规律为[4]：

$$C = \frac{m^2(m+1)^2}{4(m-1)}\left[\ln\left(\frac{m+1}{m}\right) - \frac{1}{m+1}\right]\frac{[\ln(t)]^2}{t}。 \tag{7.9}$$

随着网络尺寸的增加，规则网的平均集群系数完全不变化，衰减最慢；随机网衰减最快；无标度模型居于中间，而小世界网又居于规则网和无标度模型之间。

图 7.10 显示了数值模拟得到的无标度模型的谱密度。它与规则图或随机图的谱密度明显不同，也不是二者之间的过渡。插入图表示三角形谱密度的尾

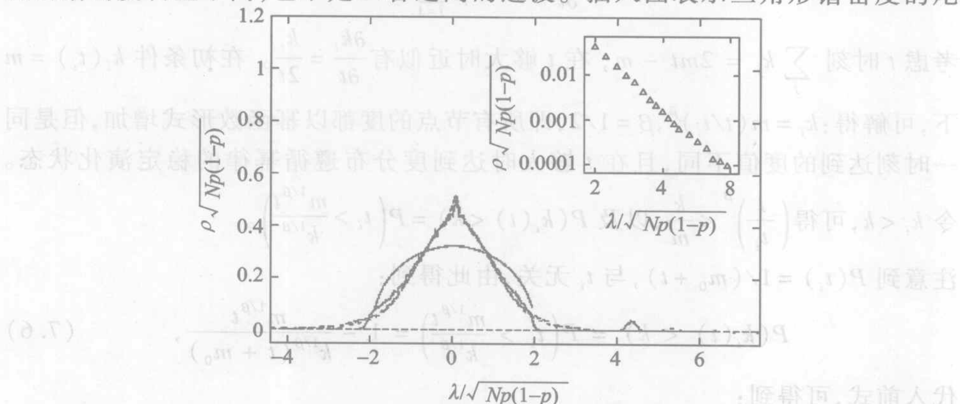


图 7.10 取 $m_0 = m = 5$ 时数值模拟得到的无标度模型的谱密度（引自文献[1]）

$N = 100$（实线），300（长虚线），1000（短虚线）。半圆表示随机图的谱密度，作为对比

部近似地遵循幂律衰减。三角形谱密度表示特征向量集中在具有最大度的一些枢纽节点上。

7.4 BA 无标度网模型的主方程解

本书 2.4 节已经介绍了主方程方法。本节介绍 BA 无标度网模型的主方程解[5]。

7.4.1 研究的问题是一个马尔可夫链

2.4 节已经介绍过,只有马尔可夫过程或者马尔可夫链才能使用主方程方法,因此应用主方程的第一步是证明待研究的问题是一个马尔可夫链。

这里要研究的问题是:在第 i 时间步,即 t_i 时刻,加入 BA 无标度网络的节点 i 在 t 时刻的度 $k_i(t)$ 是多少?

由于每一时间步加入的新点以概率 $\Pi \propto \dfrac{k_i}{\sum_j k_j}$ 连接旧点,所以任一个旧点 i 在 t 时刻的度 $k_i(t)$ 是一个随机变量,而且若节点 i 在 $t-1$ 时刻的度为 $k_i(t-1)$,则它在 t 时刻的度 $k_i(t)$ 只决定于它在 $t-1$ 时刻的度,以及在 t 时刻是否连接新点,与 $t-1$ 时刻之前的历史无关,因此这问题是一个马尔可夫链。

7.4.2 主方程

令 $P(k,i,t)$ 为节点 i 在 t 时刻具有度 k 的概率,考虑 t 时刻到 $t+1$ 时刻的演化,可以把 2.4 节介绍的马尔可夫链主方程变化为:

$$P(k,i,t+1)-P(k,i,t) = W(k,k-1)P(k-1,i,t)-W(k+1,k)P(k,i,t), \tag{7.10}$$

其中 $W(k,k-1)$ 表示节点 i 的度从 $k-1$ 一步转化为 k 的概率,也就是节点 i 在 t 时刻与一个新点连接的概率。在 7.3 节中已经得到:每个新点连接 m 个旧点,每个旧点的连接概率为:$W(k,k-1)=(k-1)/(2t)$。$W(k+1,k)$ 表示节点 i 的度从 k 一步转化为 $k+1$ 的概率,即 $W(k+1,k)=k/(2t)$。因此,主方程可以写为:

$$P(k,i,t+1)-P(k,i,t) = \frac{k-1}{2t}P(k-1,i,t)-\frac{k}{2t}P(k,i,t), \tag{7.11}$$

边界条件为:$P(k,t,t)=\delta_{km}=\begin{cases}1, & k=m\\ 0, & k\neq m\end{cases}$,即 t 时刻的新点 $i=t$ 的度一定为 m。

7.4.3 主方程的解[5,6]（文献[6]对原始文献[5]的转述简明清晰，更适于国内读者）

把主方程改写为：

$$2tP(k,t_i,t+1) - 2tP(k,t_i,t) = (k-1)P(k-1,t_i,t) - kP(k,t_i,t)。 \tag{7.12}$$

由准连续近似，有：

$$2t\frac{\partial P(k,t_i,t)}{\partial t} + \frac{\partial[kP(k,t_i,t)]}{\partial k} = 0。$$

一个特定节点 s 的平均度为：

$$\bar{k}(s,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(k,s,t) \approx \int_0^{+\infty} kP(k,s,t)\mathrm{d}k,$$

把上式两边乘 k，对 k 积分，由分部积分可得：

$$\int_0^{+\infty} k\mathrm{d}k\frac{\partial[kP(k,s,t)]}{\partial k} = \int_0^{+\infty} k\mathrm{d}[kP(k,s,t)] = -\int_0^{+\infty} kP(k,s,t)\mathrm{d}k = -\bar{k}(s,t), \tag{7.13}$$

则微分方程

$$2t\frac{\partial P(k,t_i,t)}{\partial t} + \frac{\partial[kP(k,t_i,t)]}{\partial k} = 0$$

可以改写为：

$$\frac{\partial \bar{k}(s,t)}{\partial t} = \frac{\bar{k}(s,t)}{2t},$$

且

$$\bar{k}(t,t) = m, \tag{7.14}$$

得出通解：

$$\ln \bar{k}(s,t) = \int_s^t \frac{\mathrm{d}u}{2u} = \ln C\sqrt{\frac{t}{s}}, \tag{7.15}$$

由边界条件得到：

$$\bar{k}(s,t) = m\sqrt{t/s}。 \tag{7.16}$$

离散的分布律可以表述为 δ 函数形式。例如，对于分布：$x=0$ 时，概率为 p；$x=1$ 时，概率为 q，可以写成 $f(x)=p\delta(x)+q\delta(x-1)$。类似地，可以把节点在 t 时刻度为 k 的概率分布写为：

$$P(k,t) = \frac{1}{t}\int_0^t P(k,s,t)\mathrm{d}s = \frac{1}{t}\int_0^t \delta(k-\bar{k}(s,t))\mathrm{d}s。 \tag{7.17}$$

令 $u=-\bar{k}(s,t)$，注意到 $\mathrm{d}u = -\frac{\partial\bar{k}(s,t)}{\partial s}\mathrm{d}s$ 和 $\bar{k}(s,t)=m\sqrt{t/s}$ 的解是

$$s = m^2 t \bar{k}^{-2}(s,t),$$

由 δ 函数的积分得

$$\frac{1}{t}\int_0^t \delta(k - \bar{k}(s,t))\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{t}\left(1\Big/\frac{\partial \bar{k}(s,t)}{\partial s}\right)\Bigg|_{s=m^2tk^{-2}}。\tag{7.18}$$

由上面的节点在 t 时刻度为 k 的概率分布式，可得到 t 够大时 稳态分布为：

$$P(k) = \lim_{t\to\infty}P(k,t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\frac{2s^{3/2}}{m\sqrt{t}}\right)\Bigg|_{s=m^2tk^{-2}} = 2m^2k^{-3},\tag{7.19}$$

与平均场方法结果相同。

7.5 BA 无标度网模型的率方程解

本书 2.6 节已经介绍了率方程方法。本节介绍 BA 无标度网模型的率方程解[7]。

7.5.1 率方程

文献[7]建议：BA 无标度网模型每增加一个新节点，使具有度为 k 值的节点数 N_k 增加的速率为：

$$\frac{\mathrm{d}N_k}{\mathrm{d}N} = \frac{A_{k-1}N_{k-1} - A_kN_k}{A} + \delta_{km},\tag{7.20}$$

其中 A_{k-1} 表示选取一个节点，其度为 $k-1$ 的概率；N_{k-1} 表示度为 $k-1$ 的节点的个数；$A = A(N) = \sum_{j=1} A_jN_j(N)$ 表示取一个节点，其度为所有可能值的总概率（$N_j(N)$是被选的度为 j 的节点总数），因此（$A_{k-1}N_{k-1}$）$/A$ 表示一个新点连接旧点时正好选中度为 $k-1$ 的节点的归一化概率；（A_kN_k）$/A$ 表示一个新点连接旧点时正好选中度为 k 节点的归一化概率（请注意：若选中 $k-1$ 的节点，则 N_k 增加 1（加上这个节点）；若选中 k 的节点，则 N_k 减少 1（这个节点的度将变为 $k+1$）；若选中其他度值的旧点，则与 N_k 的演化无关。）；δ_{km}（$\delta_{km}=1$，若 $k=m$；$\delta_{km}=0$，若 $k\neq m$）表示新节点对 N_k 演化的贡献，只有讨论度为 m 值时才需要考虑这个点。

7.5.2 率方程的解[6-8]

定义 $n_k = N_k/N$ 为 k 节点的比例，$\mu = A(N)/N = (\sum_{j\geq 1} A_jN_j)/N$ 为取一个节点，其度为所有可能值的归一化总概率，代入上面的率方程，可以得到一个递归方程：

$$\begin{cases} n_k = (n_{k-1}A_{k-1})/(\mu + A_k), \\ n_1 = \mu/(\mu + A_1)。\end{cases}\tag{7.21}$$

由此可得到：$n_k = \frac{\mu}{A_k}\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{\mu}{A_j}\right)^{-1}$。将 $\mu = \left(\sum_{j\geqslant 1} A_j N_j\right)/N$ 代入，得到 $\sum_{k=1}^{+\infty}\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{\mu}{A_j}\right)^{-1} = 1$。

考虑 BA 模型的数值结果，设 $A_k \propto k^{\gamma}$，把上式在准连续近似下变为积分，可得到近似解为：

$$n_k \approx \begin{cases} k^{-\gamma}\exp\left[-\mu\left(\frac{k^{1-\gamma}-2^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)\right], & 0<\gamma<1, \\ k^{-\nu}, & \nu = 1+\mu>2,\ \gamma=1, \\ \text{发散}, & \gamma>1。\end{cases} \tag{7.22}$$

对 BA 模型，有 $\gamma = 1$，只有在 $A_k = k$ 时才有 $n_k = 4/[k(k+1)(k+2)] \approx k^{-3}$，与上述平均场方法和主方程方法结果符合，如果在更一般的情况 $A_k = k+\lambda$，则有 $n_k \propto k^{-(3+\lambda)}$。

7.6 部分优选、部分随机选择模型

可以认为，BA 模型展示的无标度规律（幂律）与 ER 随机网模型展示的指数度分布是两个极端情况，自然界中的大多数实际网络的度分布介于这两者之间。好莱坞演员合作网与科学论文合著网的度分布可能是这种“中间度分布”比较典型的例子[9-12]。既然 BA 模型的核心是网络生长过程中的优选机制，而 ER 随机网模型的生长机制是随机选择，那么，描述这许多实际网络的演化模型就应该采取部分优选、部分随机的生长机制。刘宗华和来颖诚等人很可能是第一个提出这样的网络演化模型的人。他们建议的模型展示的度分布为幂律与指数函数的某种混合[13]。

刘－来模型中最重要的假设就是引入了一个可调参数 p，其变化范围为[0, 1]。当 p 取 0 时，刘－来模型就变成 BA 模型；当 p 取 1 时，就变成随机网模型[13]。模型可以简单地表述为：起始时考虑 m_0 个节点，然后每一个时间演化步增加一个新节点，每个新节点发出 m 条边连向已存在的节点。这些与 BA 模型完全一样。不同的是，在 BA 模型中，边的连接是按照概率 $\Pi_i \sim k_i$ 进行的，即度大的节点有更大的概率获得新边，而刘－来模型认为除了这种优选机制之外，连边也会受到随机因素的影响。例如在万维网的网页节点链接过程中，除了按照网页的知名度（认为正比于它的度，即被链接的次数）去选择外，对于每个具体的网页设计者，还必须考虑许多其他因素。极其大量的网页节点需要考虑的因素各不相同，常常又没有相互的关联性，就相当于随机连接。有鉴于此，刘－来模型建议连接概率取如下形式：

$$\Pi_i = \frac{(1-p)k_i + p}{\sum_j [(1-p)k_j + p]}, \tag{7.23}$$

其中 $1 \geqslant p \geqslant 0$ 为可调参数，刻画连接概率 Π_i 中确定性与随机性贡献的相对权重，求和对给定时间的所有节点进行。显然，p 为新节点随机连向节点 i 的概率，$1-p$ 则为新节点优选连向节点 i 的概率。

通过与 BA 模型相似的推导，可得方程(7.23)导致的度分布为

$$P(k) \sim \left(\frac{b + k/m}{1+b}\right)^{-\gamma}, \tag{7.24}$$

其中标度因子 γ 及常数 b 分别为[13]

$$\gamma = 3 + b, b = \frac{p}{m(1-p)}。 \tag{7.25}$$

当 $p=0$ 时，方程(7.24)变成 $\gamma=3$ 的幂律分布；当 $p=1$ 时，方程(7.24)变成指数分布 $P(k) \sim e^{-k/m}$。

方程(7.24)与(7.25)是在假定 m 为常数的条件下获得的。然而，实际过程中每个新节点所连的边数不一定完全相同，演化过程中 m 可能随时间涨落。为了对这种情形建模，刘宗华、来颖诚等人选择一个常数$\overline{m}$，并假定 $m(t)$ 可以在范围$[1, 2\overline{m}-1]$内变化。特别地，令 $m(t) = \overline{m}[1+\xi(t)]$，其中 $\xi(t)$ 为具有零平均值，且均匀分布在$[(1-\overline{m})/\overline{m}, (\overline{m}-1)/\overline{m}]$内的随机变量。由类似推导可得[13]

$$\begin{aligned} k_i(t) &\sim t^{\beta(t)}, \\ P(k) &\sim \left(\frac{b + k/\overline{m}}{1+b}\right)^{-\gamma(t)}。 \end{aligned} \tag{7.26}$$

这里标度指数 $\beta(t)$ 与 $\gamma(t)$ 依赖于时间并可由下式给出：

$$\begin{aligned} \beta(t) &= [f(t)(1-p)]/[2\overline{m} + (1-2\overline{m})p], \\ \gamma(t) &= 1 + 1/\beta(t)。 \end{aligned} \tag{7.27}$$

而$f(t)$为由下式定义的随机函数

$$f(t)\ln(t) = \int_{t_i}^{t} \frac{\overline{m}[1+\xi(t)]}{t}\mathrm{d}t。 \tag{7.28}$$

当 $t\to\infty$ 时，$f(t)\to\overline{m}$。这说明当新节点的连接度有涨落时，刘－来模型的度分布 $P(k)$具有与无涨落时相同的标度形式，只是标度指数随时间变化而已。进行平均时，标度指数就与 $m=\overline{m}$的情形相同。也就是说这个模型具有对度涨落的鲁棒性。

这种可给出不同网络结构的一般网络模型也可由其他途径实现。比如我们可令连接概率 Π_i 取如下的非线性幂律优选形式

$$\Pi_i \sim k_i^{\alpha}, \tag{7.29}$$

当 α 在$[0,1]$内变化时，方程(7.29)将给出随机模型、BA 模型以及它们之间所

有情况的度分布[14-16]。文献[15]证实这种网络模型也具有对度涨落的鲁棒性。另一种实现度分布可调节的途径可通过令连接概率 Π_i 取如下的形式来实现：

$$\Pi_i \sim A + k_i, \tag{7.30}$$

这里 α 为初始吸引[5]。方程(7.30)导致的度分布为

$$P(k) \sim k^{-\gamma}, \tag{7.31}$$

其中 $\gamma = 2 + A/m$。

7.7 局域世界模型

李翔和陈关荣在2003年发表了影响很大的"局域世界模型"[17](本节参考李翔教授对文献[17]的中文翻译稿写出)。他们以对世界贸易网(world trade web)的研究作为例子[18]，说明由于常常缺乏全局信息，BA模型建议的"全局优选连接机制"通常只能在"从事选择"节点的某个或某些"局域世界"中起作用。在这个贸易网中，一个节点就代表一个国家；两个国家之间有贸易关系，则相应的两个节点之间存在连接边。容易理解，许多国家都致力于加强与各自的区域经济合作组织(如欧盟(EU)、东盟(ASEAN)、北美自由贸易区(NAFTA)等)之内国家之间的经济合作和贸易关系，在这些区域经济合作组织内，才优先考虑与那些最强大的国家多进行贸易，而在这些区域经济合作组织之外与许多国家很少贸易来往，也就谈不上选择。类似的例子还可以举出许多。他们由这个思想出发提出了局域世界模型。

模型可以表述为：

1. 网络初始时有 m_0 个节点和 e_0 条边；

2. 随机地从网络已有的节点中选取 M 个节点，作为即将新加入网络的节点的"局域世界"；

3. 加入一个新节点和 m 条边，根据BA模型的优先连接概率来选择与局域世界中的 m 个节点相连，$\Pi_{\text{local}}(k_i) = \Pi'(i \in \text{局域世界}) \dfrac{k_i}{\sum_{j}{}_{\text{local}} k_j} = \dfrac{M}{m_0 + t} \dfrac{k_i}{\sum_{j}{}_{\text{local}} k_j} (M \geq m)$。

当 $M = m$ 时(极端情况1)，新加入的节点与其局域世界中所有的节点相连接，优先连接原则已不起作用，本模型退化为6.3节中介绍的BA无标度网络模型的随机连接情况。可以类似地列出平均场方程为

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = \frac{m}{m_0 + t}。 \tag{7.32}$$

并且类似地解出:$p(k) \propto e^{-k/m}$,即度分布遵循指数函数。

当 $M = t + m_0$ 时(极端情况 2),每个节点的局域世界其实就是整个网络,并且随着时间增长而增长,本模型退化为 BA 无标度网络模型,平均场方程为:$\frac{\partial k_i}{\partial t} = \frac{k_i}{2t}$,可以解出 $p(k) \approx 2m^2 k^{-3}$。

在 $m < M < m_0 + t$ 的一般情况,局域世界模型的度分布当然会呈现指数分布与幂律分布之间的分布。李翔与陈关荣解析地证明了:这时,如果局域世界规模 M 被固定为一个远大于 m 的常数,则本模型同样具有与 BA 无标度网络相近的无标度特性,即 $p(k) \approx 2m^2 k^{-3}$。

李翔和陈关荣的局域世界模型进一步提出了复杂网络呈现指数分布与幂律分布之间分布的一种重要物理机制,为后来的进一步研究打下了基础。

7.8 赋权演化网络的 BBV 模型

本书在第 5 章、第 6 章中介绍过赋有表征节点相互作用强度、频率等意义的"边权"的赋权网络,以及各种赋边权的统计参量定义。除了边权的实际意义之外,越来越多的实验数据显示一些真实网络的拓扑结构与边权间可能具有某种相关性[19-28]。随着网络的逐步增长,新加入的节点必然会引起权重动力学的演化,从而导致节点强度与度之间的关联。如前所述,节点 i 与 j 之间的权重为 w_{ij},节点 i 的点强度为 $s_i = \sum_j w_{ij}$,则许多实证研究表明点强度 s 和度 k 之间存在一种幂律关系[19-28]

$$s \sim k^{\beta}。\tag{7.33}$$

比如,对于科学论文合著网,点强度和度的关系为线性关系 $s(k) \sim k$[12];而对于全球航空网,点强度和度的关系显示了非线性关系 $s(k) \sim k^{\beta}$,其中 $\beta \approx 1.5$[29]。

由此,容易推导出对具有幂律分布的无标度网络,其强度的分布也一定是幂律的。若无标度网络的度分布为 $P(k) \sim k^{-\gamma}$,则其强度分布为 $P(s) \sim s^{1-\gamma-\beta} \equiv s^{\gamma'}$,其中 $\gamma' = 1 - \gamma - \beta$ 是强度分布指数。如果节点强度的范围在 $s_0 \leqslant s \leqslant s_{\max}$ 范围内,其中 s_0 与 $s_{\max}$ 分别为最小和最大强度,则利用条件 $N\int_{s_{\max}}^{+\infty} P(s)\,ds = 1$,可得 $s_{\max} \sim N^{\beta'}$,$\beta' = 1/(\gamma' - 1)$,因此无标度网络的最大强度随网络大小 N 的增加而增加。

由此出发,可以容易地理解赋权网络演化模型。这个模型最先是由巴黎特(Barrat)、巴斯莱米(Barthelemy)与维斯匹纳尼(Vespignani)建立的,通常称为 BBV 模型[20,21]。BBV 模型基于一个简单的权重驱动动力学假设,生成了与真实

权重网络极为相似的统计性质，如网络权重随时间的增长演化规律，及强度分布的无标度性等。模型可以简述如下：从初始的 N_0 个相互连接的种子节点开始网络生长，此时每条边的权重为 w_0，然后每步增加一个节点直到节点数为 N。每步增加的节点发出 m 条边，以如下的概率按照点强度优选连接到已有的节点 i：

$$\Pi_{n\to i} = \frac{s_i}{\sum_j s_j}。\tag{7.34}$$

这个规则放弃了通常的度优选连接，而改用强度优选连接。模型定义每条新边的权重为 w_0，并且新边 (n,i) 的存在会引起网络权重的变化。具体表现为：新点连接 i 节点，会使它的点强度增加一个小量 δ，从而使 i 节点的点强度变为 $s_i \to s_i + \delta + w_0$。这个新增加的小量 δ 将按如下方式分配到 i 节点的其他边上：

$$w_{ij} \to w_{ij} + \Delta w_{ij}, \quad \Delta w_{ij} = \delta \frac{w_{ij}}{s_i}。\tag{7.35}$$

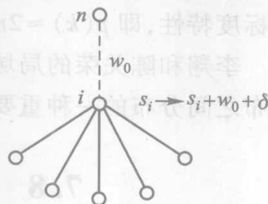


图 7.11　新增节点引起权重的重新分配示意图（引自文献[20]）

图 7.11 为这种网络增长过程的示意图，这里的 δ 为常数。文献[21]考虑了 δ_i 依赖于节点 i 的情形。

可以把 w_0 设置为权重的标度，用它重新标度 w_{ij}/w_0，s_i/w_0 及 δ/w_0 等量。为简单起见我们令 $w_0 = 1$，于是 BBV 模型就只依赖于无量纲的参数 δ。考虑到节点 i 的点强度变化来自于两个方面：i 被连边及 i 的邻居被连边，因此 s_i 的演化可由如下方程给出：

$$\frac{\mathrm{d}s_i}{\mathrm{d}t} = m\frac{s_i}{\sum_j s_j}(1+\delta) + \sum_{j\in v(i)} m\frac{s_j}{\sum_l s_l}\delta\frac{w_{ij}}{s_j} = \frac{2\delta+1}{2\delta+2}\frac{s_i(t)}{t}。\tag{7.36}$$

类似地，度演化的速率方程为

$$\frac{\mathrm{d}k_i}{\mathrm{d}t} = m\frac{s_i(t)}{\sum_j s_j(t)} = \frac{s_i(t)}{2(1+\delta)t}。\tag{7.37}$$

比较方程(7.36)与(7.37)可见 $k_i(t) = s_i(t)/(2\delta+1)$，因此有 $s \sim k$，即方程(7.33)中 $\beta = 1$ 的情况。从方程(7.36)与(7.37)，进一步可得点强度分布 $P(s) \sim s^{-\gamma}$ 及度分布 $P(k) \sim k^{-\gamma}$，其中标度常数为[20,21]

$$\gamma = \frac{4\delta+3}{2\delta+1}。\tag{7.38}$$

因此 BBV 模型为无标度网络，其指数 $\gamma \in [2,3]$。当 $\delta = 0$ 时，BBV 模型恢复为 BA 模型。

类似地，我们可得出边权的演化方程。当节点 i 或 j 得到新边时，边 i,j 的权重 w_{ij} 就会增加，其对应的率方程可写为

$$\frac{dw_{ij}}{dt} = m\frac{s_i}{\sum_j s_j}\delta\frac{w_{ij}}{s_i} + m\frac{s_j}{\sum_j s_j}\delta\frac{w_{ij}}{s_j}。\tag{7.39}$$

从此方程可得边权的分布为$P(w) \sim w^{-\alpha}$,其中$\alpha = 2 + 1/\delta$[20,21]。

7.9 可调集群系数的HK模型及其改进模型

小世界模型显示高集群系数却不显示无标度特性,BA模型显示无标度特性却又不显示高集群系数。因此,构造出一种既有高集群系数又有无标度特性的网络就很有意义。实现此目的一个直观想法,是将BA网的集群系数调高。现已发现网络的集群系数可以通过多种方法进行改变,其中一个比较典型的方法是断边重连法[30-32]。其具体做法如下:随机挑选两条边,一条连接节点A与B,另一条连接节点C与D。让每个节点改变伙伴,则原始的边AB与CD就不复存在而代之以新边AD与BC。如果这个操作导致相关节点(A—D)上的集群系数之和变大,则此操作有效;否则放弃此操作,再重新选取两条新边。如此进行下去,就可增大网络的集群系数。这个方法的优点之一是在调节集群系数时,各节点的度及网络的度分布保持不变。

断边重连法是在网络结构已构造好以后才改变集群系数,另外一种比较典型的改变集群系数的方法是在网络的生长过程中进行调节与控制。其基本思想是考虑到集群系数实际上描述的是第三个节点与前两个节点一起形成三角形的概率,因此如果在网络的形成过程中有意让节点形成三角形,则可实现改变集群系数的目的[33-36]。这种方法是由荷尔姆(Holme)与金(Kim)提出的,我们称其为HK模型[33]。这种方法的依据是群落中一对新朋友的建立往往是通过他们共同的朋友介绍而成,这是一种进行新边连接的"三角形形成法"(TF法)。TF法为:如果节点v与w之间的一条边是前一步以优选法则连接的,则再增加一条边,从节点v连向随机选择的节点w的一个邻点,这样构成一个新的三角形。用TF法生成网络的HK模型可以简单地表述为:在BA生长模型中,当新加的节点发出m条边到已存在的节点时,不是让它们全部按优选连接,而是按TF法进行连接。即当一个带有m条边的节点v被加到网络中时,第一条边以优选连接,然后剩下的$m-1$条边以概率P_t进行TF连接,以概率$1-P_t$进行优选连接。平均来说,每个新加的节点以TF法连的边数为$m_t = (m-1)P_t$,这就是集群系数的控制参数。当$m_t = 0$时,此模型就变回BA模型。文献[33]证明用TF法给出的度分布为$P(k) \sim k^{-3}$。

最近,武晓雁与刘宗华将此方法推广到了具有群落结构的社会网[35]。他们考虑到这种网由若干个群落组成,群落内部的连线密度要远大于群落之间的连

线密度，因此群落网可看成由若干个稀疏连线连接的群落构成[37]。除了群落内的连线用 TF 法实现外，群落间的连线也应该用 TF 法实现，即它们也可以是通过朋友介绍而成。由此，可调集群系数群落网的构造算法如下：

1. 初始时，有 m_0 个群落，每个群落内有 m_1 个相互连接的节点。我们这里令 $m_0 = m_1 = 3$。

2. 在每个时间演化步，每个群落以概率 p 加一个新节点，即增加的总节点为 $m_0 p$。每个新加的节点发出 m 条边到同群落中的其他节点，我们这里取 $m = 2$。第一条边以概率 $k_i / \sum_j k_j$ 优选连接到节点 i，其中求和对同群落中所有的节点进行；第二条边则随机地以概率 q 连到节点 i 的一个邻居，以概率 $1-q$ 优选连接到同组中的另一节点。因此节点 i 的演化方程为

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = p\left[\frac{k_i}{\sum_j k_j} + qk_i\left(\frac{k_n}{\sum_j k_j}\frac{1}{k_n}\right) + (1-q)\frac{k_i}{\sum_j k_j}\right] = 2p\frac{k_i}{\sum_j k_j}, \tag{7.40}$$

其中 $k_i\left(\frac{k_n}{\sum_j k_j}\frac{1}{k_n}\right)$ 来自于节点 i 的 k_i 个邻居。

3. 在每个时间演化步，我们以概率 $1-p$ 在每个群落内用优选连接选择一个节点 i，并让它发出 m 条边到其他群落内的 m 个节点，即总增加的连线为 $mm_0(1-p)$。这 m 个节点可这样选取：首先从其他两个群落中随机确定一个群落，然后优选选出一个节点连第一条边；第二条边则以概率 q 连向所选节点的任一邻居，以概率 $1-q$ 优选连向此组内的任意节点。它们对 k_i 的演化贡献为

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = (1-p)\left\{2\frac{k_i}{\sum_j k_j} + \left[\frac{k_i}{\sum_j k_j} + qk_i\left(\frac{k_n}{\sum_j k_j}\frac{1}{k_n}\right) + (1-q)\frac{k_i}{\sum_j k_j}\right]\right\}$$

$$= 4(1-p)\frac{k_i}{\sum_j k_j}, \tag{7.41}$$

其中 $\left[\frac{k_i}{\sum_j k_j} + qk_i\left(\frac{k_n}{\sum_j k_j}\frac{1}{k_n}\right) + (1-q)\frac{k_i}{\sum_j k_j}\right]$ 来自于其他的两个群落

4. 重复步骤 2 与 3 直到每个组内的节点数为 N_0，即网络中的总节点数为 $N = m_0 N_0$，演化在 $t = (N_0 - m_0)/p$ 时停止。

将上面两个方程加在一起得

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = 2(2-p)\frac{k_i}{\sum_j k_j}。 \tag{7.42}$$

通过简单计算可得其度分布为[35]

$$P(k) = 2^{\frac{m}{2-p}} \frac{m}{2-p} k^{-\frac{m}{2-p}-1}。 \tag{7.43}$$

显然,$P(k)$为幂律分布且与q无关。

考虑到集群系数$C=\frac{1}{N}\sum C_i, C_i=\frac{2E_i}{k_i(k_i-1)}$,其中$E_i$为节点$i$的$k_i$个邻居之间实际连接的边数。从算法1到4可知,$E_i$正比于$q$,因此我们有

$$C \sim q, \tag{7.44}$$

即q控制着集群系数。此模型的优点是其度分布与集群系数可分别独立地由可调变量p与q控制,并可连续的调节。图7.12显示了此模型集群系数C随q变化的数值验证,可见数值模拟与理论公式(7.44)式符合得很好。

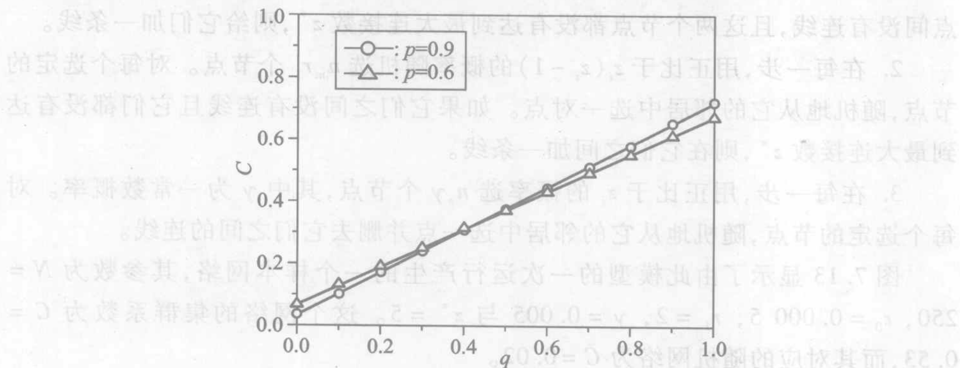


图7.12　集群系数C随q的变化关系

其中“圆圈”与“三角形”分别代表$p=0.9$与$p=0.6$的情形

7.10　JGN 社会网络模型

社会网都在随时间演化,不断有新朋友加入与老朋友淡出。除了刚刚讨论的HK模型及其改进模型外,现已发展了许多其他的社会网模型[38-42]。社会网通常包含如下一些特点:

1. 固定的节点数:虽然朋友关系可维持数小时、数天或数年,但跟人的生命相比仍可当作小尺度,因此,在集中研究朋友关系时,可以近似地认为社会网的人数固定,没有生老病死。

2. 有限的度:当一个人的朋友数达到一定数目后,由于精力有限,交新朋友的速度就会大大降低。

3. 大的集群系数:如果两个人有公共的朋友,他们成为朋友的可能性就会大增。

4. 朋友关系的衰减：朋友关系存在一段时间后，如不增加新的营养就会衰减。

根据这些特点，金（Jin）、吉文（Girvan）与纽曼（Newman）建议了一个社会网演化模型。JGN 模型可以简单地表述如下[38]：

令 $n_p = \frac{1}{2}N(N-1)$ 为网络中的节点对数，$n_e = \frac{1}{2}\sum_i z_i$ 为已存在边的数目，其中 z_i 为第 i 个节点的度。令 $n_m = \frac{1}{2}\sum_i z_i(z_i-1)$ 为近邻对的总数，$r = r_0 + r_1 m$ 为节点结成对的速率，其中 m 为相互都为朋友的节点对数目。

1. 在每一步，从网络中随机均匀地选 $n_p r_0$ 对节点来相连。如果选的那对节点间没有连线，且这两个节点都没有达到最大连接数 z^*，则给它们加一条线。

2. 在每一步，用正比于 $z_i(z_i-1)$ 的概率随机选 $n_m r_1$ 个节点。对每个选定的节点，随机地从它的邻居中选一对点。如果它们之间没有连线且它们都没有达到最大连接数 z^*，则在它们之间加一条线。

3. 在每一步，用正比于 z_i 的概率选 $n_e \gamma$ 个节点，其中 γ 为一常数概率。对每个选定的节点，随机地从它的邻居中选一点并删去它们之间的连线。

图 7.13 显示了由此模型的一次运行产生的一个样本网络，其参数为 $N = 250$，$r_0 = 0.0005$，$r_1 = 2$，$\gamma = 0.005$ 与 $z^* = 5$。这个网络的集群系数为 $C = 0.53$，而其对应的随机网络为 $C = 0.02$。

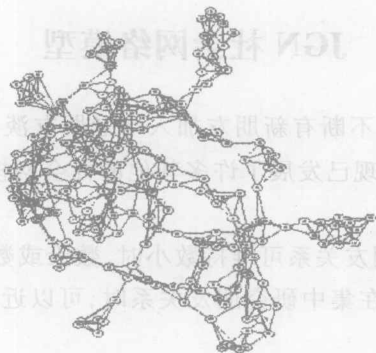


图 7.13　金、吉文与纽曼建议的社会网络模型一次运行产生的网络（引自文献[38]）

7.11 自组织耦合演化模型

在大多数复杂网络模型中,“网络的动力学”和“网络上的动力学”是分开的,研究者们常常忽视网络拓扑结构的形成和网络功能性质的涌现之间的相互影响。当网络结构与节点的动力学状态无关,或者这两方面的变化速度相当不同的时候,这样做是合理的。然而,在学术研究、艺术创作、金融交易、全球气候变化和大脑中神经元网络的突触可塑性等实际现象中,人们发现,结构和功能可以从同一个过程涌现出来,这时,节点的状态以及它们之间的相互作用都随时间演变,二者互相反馈。所以,对于这些问题,应该采用合适的、基于耦合演化机制的新模型。然而,只有很少的模型能同时自发涌现出网络的无标度结构和节点集体动力学[43]。另一方面,研究者们经常假设新节点知道整个增长网络的全局信息,而这对于规模巨大的系统而言通常是不可能的。从这种意义上来讲,需要建立基于局部相互作用机制的模型来了解能否从自组织动力学推导出整个系统的结构和功能性质。

网络节点的状态与连边关系协同演化的模型,可以称为耦合演化网络模型(co-evolution network model)[44],也称为自适应网络模型(adaptive network model)[45]。由局部信息引起连边关系的变化,从而导致宏观性质涌现的网络模型,则称为自组织网络模型(self-organized network)[46]。下面,我们介绍自组织耦合演化模型的一个例子——描述基于竞争排斥原理的无标度网络生成过程的模型。

在自然界的生态系统中,有些物种能够共存在同一环境下,并且以同样的食物资源为生。但是,在利用这些资源的方式上存在着微小但却非常重要的差别。比如,取食同一种植物为生的不同昆虫,有的吃嫩叶,有的吃老叶;有的从叶子正面取食,有的从反面取食;有的吃叶柄,有的吃茎干;有的在夜间进食,有的在白天进食……用生态学术语描述,则称它们占据着不同的生态位(niche),这就是“生态分离现象”。占据同一或者相近生态位的物种之间存在强烈的竞争。生存压力迫使它们的特性与局部平均水平逐渐偏离,并且渐渐引起物种的进化分歧。这是在长期的演化过程中,物种对于生存竞争作出的自发反应,是新物种形成与存活的重要因素。在生态学的教科书[47]上,这被归纳为竞争排斥原理,表述为:作为竞争的结果,几乎很难看到两个相似的物种占据相似的生态位。它们相互错开生态位,即各自采用的食物和生活方式可以使自身在竞争者面前占据有利的状态。或者简言之:没有两个占据同一生态位的物种能够共存。这又可以称作生态学的“泡利原理”。

最近,南京航空航天大学课题组建议推广、运用竞争排斥原理来理解其他类

型的复杂系统[48]。推广的竞争排斥原理认为,个体迫于生存压力,倾向于表现得与众不同,从而不断更新自身的状态,同时,个体之间的关联也会相应的发生变化。这些自然倾向应该可以促成社会领域中的不同团体的产生,正如自然界中物种的形成一样。此外,耦合演化的相互作用可以导致复杂网络中多种类型的幂律的拓扑关系,以及像节点状态的多重分形、自发分级和进化分歧等一些功能的产生。

南京航空航天大学课题组、中国科技大学课题组、扬州大学课题组用三个迭代规则建立模型:(1)网络的演化开始于一个简单的有 m_0 个节点的完全图。给网络上每一个节点 i 分配一个介于(0,1)之间的随机实数 $w(i)$ 作为初始状态。每个演化时间步内,将某个新节点 i' 加入到现有的网络中,从 i' 任意地连接 m 条边($m<m_0$)到旧的节点(见图 7.14(a))。(2)每个演化时步内,对每一个节点 i 计算 $\overline{w}(i)$——与该节点相连的最近邻节点 j 的状态值 $w(j)$ $(j\neq i)$ 的平均值。从 j 中挑选出与平均值 $\overline{w}(i)$ 相差最大的节点,称为 $J_{max}(i)$,对应于 $\max|w(j)-\overline{w}(i)|$,然后,从 i 节点的最近邻中随机选择的节点 j 作为 $J_{max}(i)$ 的后代,称作 $J_{sed}(i)$。与以前的采用相似规则的退出者模型[49]不同,他们让 $J_{sed}(i)$ 节点保持在原来的位置,并且,该节点的状态变量更新为 $w(J_{sed}(i))=w(J_{max}(i))+\delta$, $\delta\in(0,1)$ 同样也是均匀分布的随机数。很明显,这里的 $w(i)$ 可认为是不随时间减少的状态变量(见图 7.14(b))。(3)对于每个时步中引入的新节点 i',与它的足够"年轻"的同伴($i'-i\leqslant\Delta I$,ΔI 是一个表示老化效应的给定整常数,为了使用方便,以后称这些节点为 I)。在网络中查找所有 I 的近邻节点 j。当 $w(J_{sed}(j))/w(I)\geqslant h$ 时,在节点 $J_{sed}(j)$ 和 I 之间加一条新边(重复连接和与自身连接的边除外),其中 h 是一个给定的阈值。同时,如果节点 I 和近邻 j 符合条件 $w(j)/w(I)<h$ 或者反之,就将连边切断(见图 7.14(c))。最后,如果任意节点 i 因为断边而变成了孤立节点,就将它直接连到 $J_{sed}(i)$ 上。这里采用的阈值判据,已在复杂系统的

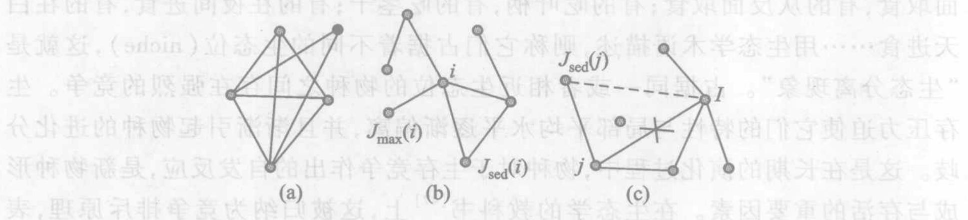


图 7.14 三个迭代规则(引自文献[48])

(a) 一个新节点连接到网络中原已存在的任意节点上($m=2$,$m_0=4$);(b) 每个节点 i 随机选择其邻居 $J_{sed}(i)$,并让其状态值比 $w(J_{max}(i))$ 增加一个随机量 δ;(c) 如果邻居节点 j 与年轻节点(I)的状态值比小于阈值 h 或者反之,则将两者断开,同时,如果从邻居 j 中选出的节点中 $J_{sed}(j)$ 与 I 点的状态之间比值大于等于 h 时,就将 $J_{sed}(j)$ 连接到 I 上

建模中被广泛使用。例如,在文献[50]中卡里斯基(T. Kalisky)等人在一个ER随机网模型产生的网络中对所有边随机地分配权重,并且使所有权重小于阈值的节点相连,通过这种方法他们得到了一个无标度的“超节点网络”。

实际上,以上的模型迭代规则是从对真实系统的考察中抽象得出的。在艺术创作和科学研究中,人们具有的一般倾向就是开创新的工作,从而表现出得与众不同。两个大相径庭的观点常会碰撞出创新的火花。众所周知,学者们常受到发表新论文的压力。但是,与已有的文章具有相同或者相近的观点、方法和结果的论文发表的机会很小。从这里我们可以看出竞争排斥促进了科学研究的繁荣。设想一个研究生加入某个研究课题,刚刚开始他的学术生涯,通常由于时间限制,他只能够在广泛调研后关注某一些文章,并将阅读范围扩大到这些文章的参考文献上。一般来说,他需要更加关注与其知识背景($w(i)$)相差较大的文章和最新发表的文献来寻找自己文章的灵感。但在阅读文献的过程中,他可能受到本身理解能力的限制。因此,我们可以很自然地假设存在一个合适的比例阈值(h)范围。学者 I 可以阅读状态值 $w(j) \geqslant h \times w(I)$ 的文章,并且他可能引用基于其自身的有限眼界和理解能力而选择阅读的文献,从而造成引文网中节点增加的入度。相反,与 $w(I)$ 差异很小的文章(设节点状态为 $w(j)$,则 $w(j)/w(I)$ 的比率太小)则很少被引用(节点 I 和 j 的连接断开,如图 7.14(c)所示)。一般而言,一个最近更新状态的节点($w(J_{sed}(i))$)对于一个失败节点(孤立节点)是更有吸引力的。音乐家共同演出网络可以作为另一个竞争排斥的例子。我们知道,风格相似的音乐家是演出竞争对手。由于听众更喜好多样性的表演,经理们通常不会安排他们出现在同一个舞台上。我们可以假定无论是谁制作节目单都会使用某种标准来组合其中的艺术家。人们通常不会发现音乐会是重摇滚、爵士和钢琴奏鸣曲的混合,因此一定存在一个阈值范围来平衡同种和异种音乐。作为耦合演化的结果,引文网络和音乐家网络都显示出了无标度结构的拓扑,尽管大多数食物网络并非如此。设想一个人面临着职业危机,他必须更新状态使得自己不再显得十分平庸。因此,他可能尝试向由共同的朋友推荐的成功人士学习,甚至与其合作。但是,他们能否保持紧密的联系则取决于他们之间是否能以某种量度(例如 $w(i)$)进行互补。在所有这些情形下,节点状态均随时间变化,他们之间的关联相应的沿着可以优化的梯度变化。

节点状态和拓扑连接的耦合演化产生了复杂网络的大多数结构特性。数值模拟显示出节点度的幂律分布:$P(k) \sim k^{-\gamma}$,如图 7.15(a)所示。这里对网络结构没有作系综平均。计算表明,在 $h=3.0$ 的情况下,所有 m 值相应的度分布保持不变,斜率 $\gamma=2.39$。入度是计算一个节点接受年轻节点所发出的连边的数目。该分布同样为幂律,如图 7.15(a)的插入图中所示。双对数线 $P_i(k) \sim k^{-\beta}$ 的斜率大概在 $\beta=2.0$ 左右。这与引文网的一个模型[51]的数值结果以及实证

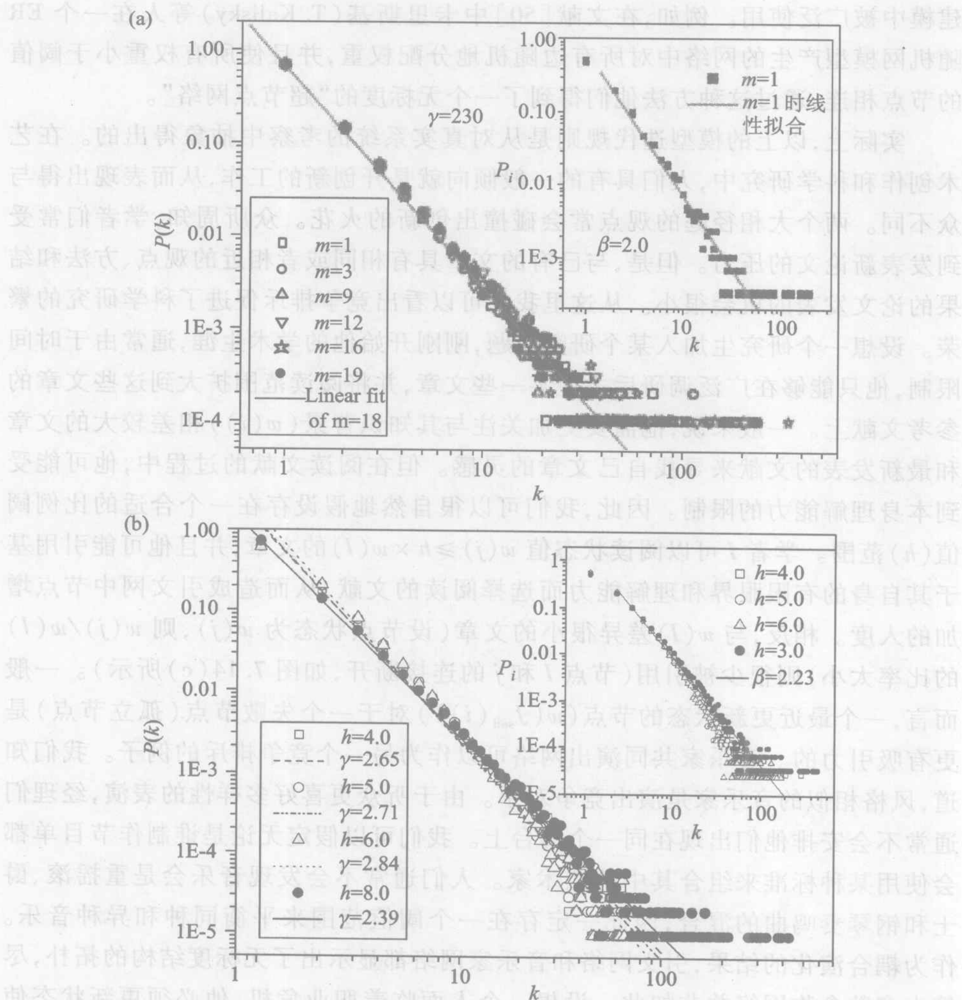


图 7.15　耦合演化的无标度网络的幂律度分布(引自文献[48])

(a) $h=3.0$ 时的度分布,不同 m 值对应的线重合到单一的线上,其中 $\gamma=2.39$。插入图:当 $h=3.0$ 和 $m=1$ 时的入度分布 $\beta=2.0$;(b) h 分别为 3.0,4.0,5.0,6.0 时,与阈值有关的度分布。插入图:相应的入度分布,所有的直线中 $N=10^4$,$\Delta I=10$ 和 $m_0=20$

数据[52,53]很好地吻合。图 7.15(b)中展示了与关联阈值 h 有关的幂指数 γ 的变化。γ 取值在(2.0,3.0)区间,这也和真实的复杂系统符合得很好。插图显示了不同阈值下的入度分布的幂律行为。另外,计算出的同类性系数 r 在图 7.16(a)中表示,这种系数描述网络的度－度关联。它们反映了社会网络正相关的统计学特征。此外,它们也表现出网络规模的渐近的幂律衰减,即,$r(N)\sim N^{-\alpha}$。到目前为止,这是一个在本模型中首次发现的特殊性质。它有待于真实复杂系

统的实证数据验证。图 7.16(b)显示了与尺寸大小有关的集群系数:$C(N) \sim N^{-\eta}$。指数范围为(1.2,1.4),对应的阈值范围为[3.0,8.0]。作为比较,随机图中 η 值为 1.0。

在较低阈值下(例如,$h=2.0$ 和 1.5)的数值模拟显示,迭代规则会导致不同于幂律度分布的行为(详见图 7.17 的实线和虚线,无序度 $a=0.0$)。然而,当我们允许一小部分节点(比如 10% 到 20%,即无序度 $a=0.1$ 和 0.2)不运行规则 3 的截断操作的时候,可以迅速重新得到无标度特性(见图 7.17)。同时,度 - 度关联重建了相应于无标度特性的正相关属性。这意味着由确定性规则制约的复杂系统中可能存在或多或少的规则弛豫,无序在无标度性质的形成中可

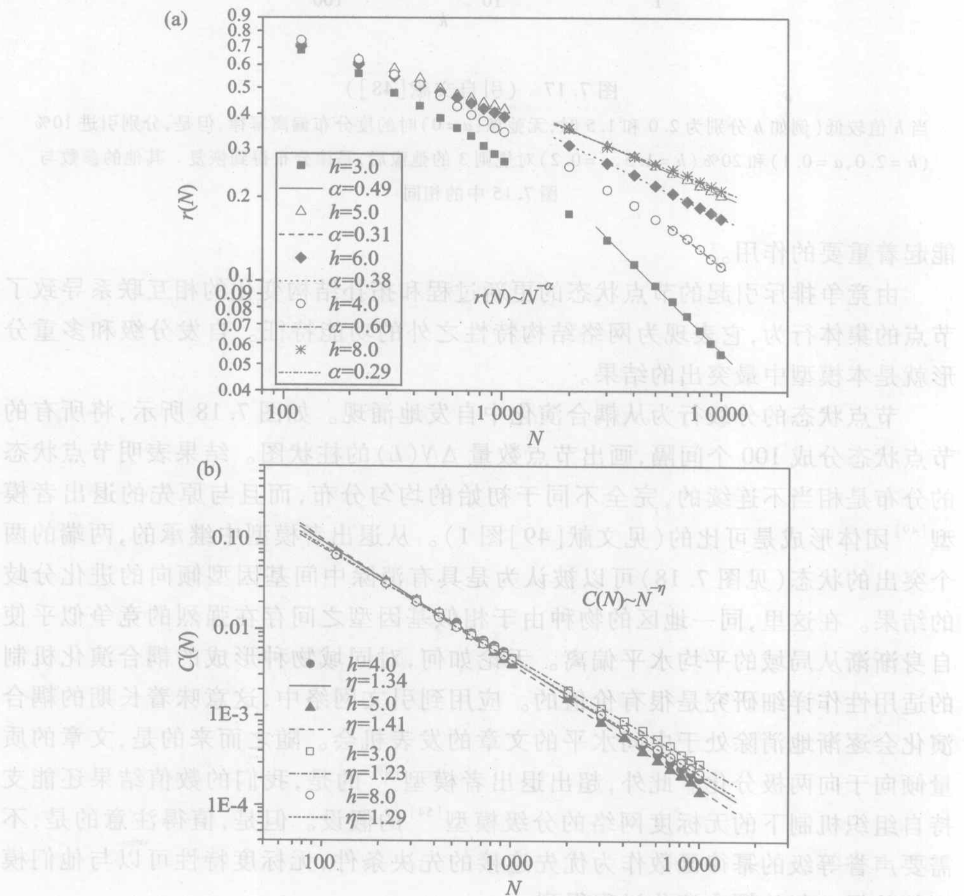


图 7.16 (引自文献[48])

(a)同类性系数与网络大小相关的渐近幂律衰减:当 $N \geq 10^3$,$r(N) \sim N^{-\alpha}$,α 与阈值 h 有关;(b)与网络大小有关的集群系数幂律衰退,$C(N) \sim N^{-\eta}$,对网络位形做了 10 次系综平均

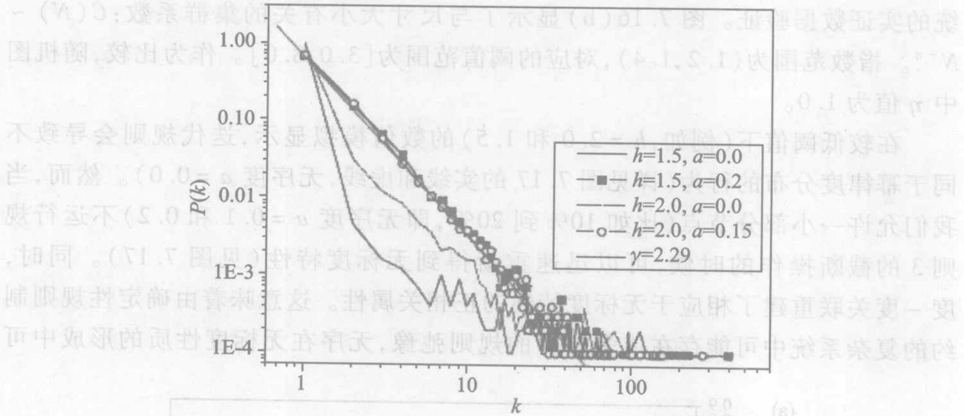


图 7.17　(引自文献[48])

当 h 值较低(例如 h 分别为 2.0 和 1.5 时,无弛豫:$a=0$)时的度分布偏离幂律,但是,分别引进 10%($h=2.0, a=0.1$)和 20%($h=1.5, a=0.2$)对规则 3 的弛豫后,幂律分布得到恢复. 其他的参数与图 7.15 中的相同

能起着重要的作用。

由竞争排斥引起的节点状态的更新过程和拓扑结构变化的相互联系导致了节点的集体行为,它表现为网络结构特性之外的功能特征。自发分级和多重分形就是本模型中最突出的结果。

节点状态的分级行为从耦合演化中自发地涌现。如图 7.18 所示,将所有的节点状态分成 100 个间隔,画出节点数量 $\Delta N(L)$ 的柱状图。结果表明节点状态的分布是相当不连续的,完全不同于初始的均匀分布,而且与原先的退出者模型[49]团体形成是可比的(见文献[49]图 1)。从退出者模型中继承的,两端的两个突出的状态(见图 7.18)可以被认为是具有消除中间基因型倾向的进化分歧的结果。在这里,同一地区的物种由于相似基因型之间存在强烈的竞争似乎使自身渐渐从局域的平均水平偏离。无论如何,对同域物种形成的耦合演化机制的适用性作详细研究是很有价值的。应用到引文网络中,这意味着长期的耦合演化会逐渐地消除处于中间水平的文章的发表机会。随之而来的是,文章的质量倾向于向两极分化。此外,超出退出者模型[49]的是,我们的数值结果还能支持自组织机制下的无标度网络的分级模型[54]的假设。但是,值得注意的是,不需要声誉等级的幂律函数作为优先连接的先决条件,无标度特性可以与他们模型的前提一起从耦合演化过程得到。

为了寻找节点状态整体的多重分形[55],首先根据节点参与到网络中的先后排成状态的时间序列。一旦最后一个节点加入到系统中,然后,让耦合演化停止,将节点状态的序列分成许多相同的长度为 L 的盒子,并且计算每个盒子 n 中

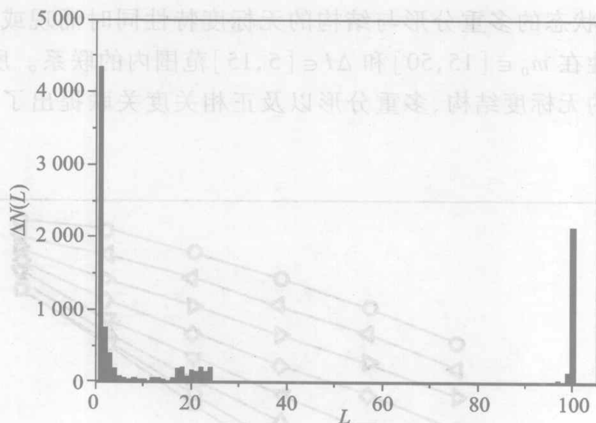


图 7.18 节点数量 $\Delta N(L)$ 的柱状图(引自文献[48])

横坐标是节点状态值 $w(i)$ 的离散化等级 L。其中 $h=3.0$, $m=18$,其他参数与图 7.15(a)中的相同

i 节点的状态值 $w(i)$ 的总和,记为 $\mu_n(L)$。从统计学角度看,$\mu_n(L)$ 与盒子的尺寸大小成幂律关系。第 n 个盒子中的奇异强度 α_n 定义为幂律的指数:

$$\mu_n(L) \sim L^{\alpha_n}。 \tag{7.45}$$

按这种方法,盒子能够根据 α_n 的值组成不同的子集。子集 α 包含窗口 α 之内含有 α_n 的所有盒子。子集 α 中的数密度 $N(\alpha,L)$ 是豪斯多夫(Hausdorff)维度为 $f(\alpha)$ 的分形,即

$$N(\alpha,L) \sim L^{-f(\alpha)}。 \tag{7.46}$$

奇异谱 $f(\alpha)$ 完全地刻画了节点状态 $w(i)$ 序列整个测度的多重分形性质。我们可以使用合适地归一化的作 $\mu_n(L)$ 的第 q 阶矩为节点序列分布的度量:

$$\mu_n(q,L) = \mu_n^q(L) / \sum_{n'} \mu_{n'}^q(L)。 \tag{7.47}$$

然后给出 $\alpha(q)$ 和 $f(q)$ 的定义,分别为下列形式:

$$\alpha(q) = \lim_{\delta\to 0} \mu(1,L)\ln\mu(1,L)/\ln\delta, \tag{7.48}$$

$$f(q) = \lim_{\delta\to 0} \mu(q,L)\ln\mu(q,L)/\ln\delta, \tag{7.49}$$

这里 $\delta = L/N$,表示盒子大小和系统规模的比率。可是,豪斯多夫维数 $f(\alpha)$ 的定义仅当公式(7.49)中分子和分母对于不同 δ 取值时保持线性关系时才有效。我们可以分别定义 $v(q,L) = \sum_n \mu_n(q,L)\ln\mu(q,L)$,$x = \ln\delta$。在图 7.19 中心的至少四五条线中可以看出这两者基本呈现线性关系。插入图中显示出多重分形的奇异谱 $f(\alpha)$($N=9\,728$, $L=2^l$, $l=1,2,\cdots,6$)。这里的情况不同于宋(Song)等人[54]对拓扑结构的分形的量度。有趣的是,我们的模型给出了以无标度网络作为内在骨架的以长程关联梯度驱动增长[56]的多重分形实体的另一个范例。

我们发现，节点状态的多重分形与结构的无标度特性同时涌现或消失。我们检验了这两个特性在 $m_0 \in [15,50]$ 和 $\Delta I \in [5,15]$ 范围内的联系。所以，这样的模型为社会系统的无标度结构、多重分形以及正相关度关联提出了一个共同的新机制。

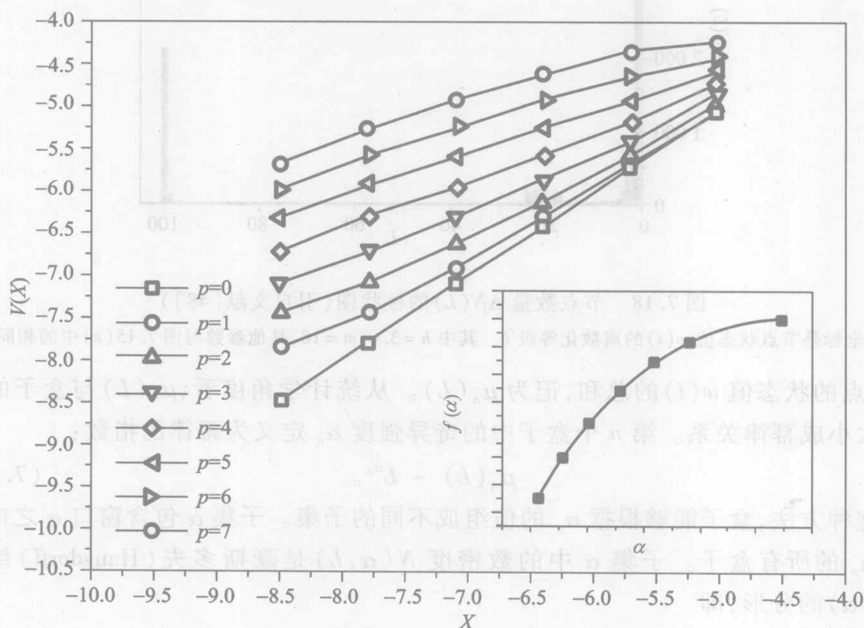


图 7.19 根据相继加入到网络中的节点的时间次序，用盒子计数法检验节点状态多重分形的存在（引自文献[48]）

插入图：节点状态 $w(i)$ 的多重分形的奇异谱 $f(\alpha)$。网络的 $h=3.0$，$m_0=20$，$m=18$

结构和功能上的宏观特性的同时涌现使我们能够同时在可变细节的耦合演化的新平台上去理解因特网[56]，通过不同的交通或者通信途径相连的居民点的复杂网络（有些是无标度的），其中包括全球空间范围内的人口分布网[57]。此外，还可以理解中纬度气候网络[58]、引文网络[52,53]、生态学网络中的物种数量分布[59]、音乐家网络[60]、演化最优算法的维持多样性的方法[53,61]等。我们发现，它们都是由状态随时间改变的个体组成，个体之间的连边可以改变，并且这些系统中或多或少存在竞争排斥现象。事实上，本模型的机制是另一种优先连接机制。就是说，节点状态关联取决于阈值而不是依靠节点的度，这也是本模型与之前的其他模型的不同之处。从退出者模型出发，并超越了退出者模型，我们可以考虑把个体的一般性质（更新状态使个体自适应于竞争排斥，而且他们之间的关联相应的发生改变）作为一些复杂系统自组织演化的驱动力。这些系统以不

同拓扑量的幂律分布和具体的功能为特征。进一步地,从竞争排斥耦合演化过程的模型出发,我们期望得出认识具有相似机制的不同复杂系统的涌现特性(例如无标度、物种分化、度相关性以及多重分形性质)的一般思路。

除了网络的无标度拓扑性质与具体功能的协同涌现以外,耦合演化网络(自适应网络)模型还可以描写网络上的动力学和拓扑结构的跃变现象。从不同的研究角度来认识,可以描述为分岔或者相变。

一些接触过程描写了某种性质,例如信息、政治观点、宗教信仰或者传染病沿着网络中连边的传播,它们给出了研究动态相互作用的一个简单框架。这一类问题中最简单的模型是传染病流行的 SIS 模型。该模型描述一群形成社会网络的个体。每个时间步内,所考虑的每个个体或者是易感染疾病的(S)或者已经感染疾病的(I)。一个易感染疾病的个体与已感染个体在接触后以一定的概率 p 被感染。已感染的个体以概率 r 康复,即再一次转变为易感染体。如果在静态网络上考虑,SIS 模型至多只有一次动态转变。在转变之前,只有无疾病态是稳定的,一旦经过转变之后,可以产生在感染态在整个网络上蔓延的传染病状态。

如果考虑易感染个体可以试着避免与已感染个体接触这样一个附加过程,空间 SIS 模型可以变为一个自适应网络模型。这种情况已由格罗斯(Gross)等人研究过[45]。在他们的模型中,一个给定的易感染个体以概率 w 与一个已感染的邻居断开连接,并与另一个易感染个体之间形成一条新的连接。正是这一附加规则将 SIS 模型变成一个自适应网络。正如格罗斯等人在文献[45]中所述:即使是适度的重连概率也能有效地改变系统的动力学。在无疾病态和感染态中均会出现意想不到的非连续转变和双稳区域(见图 7.20)。爱尔哈德(Ehrhardt)[62]等人也报道过相似的发现,他们在一个适应性的网络上研究了更新的传播以及相似的现象。

文献[45]中的自适应 SIS 模型在较高的重连比率下会到达振荡态,这时流行病的传播呈周期性变化。一方面,重连过程孤立了已感染个体,从而减轻疾病的传播。另一方面,重连过程引起易感染个体之间连边的累积,因此,形成内部紧密连接的集团。起始阶段,孤立效果起主要作用,能降低已感染个体的密度。但是,当易感染个体的集团变得更大且连接更强时,出现一个阈值,超过阈值时,传染病会在易感染的人群中传播。这会导致易感染个体的集团崩溃,流行病传染加快,从而构成了一个循环。该循环在上述模型中仅存在于较窄的区域内(见图 7.20),此参数区域出现了振荡。如果考虑重连比例会与人群的意识进而与传染病的流行程度相关联,那么,振荡幅度会变大。

在自适应 SIS 模型中,上面讨论的自适应网络的特点会再次出现:已感染个体的孤立和单个的紧密连接的易感染个体的集团的涌现,这是从局部规则出发

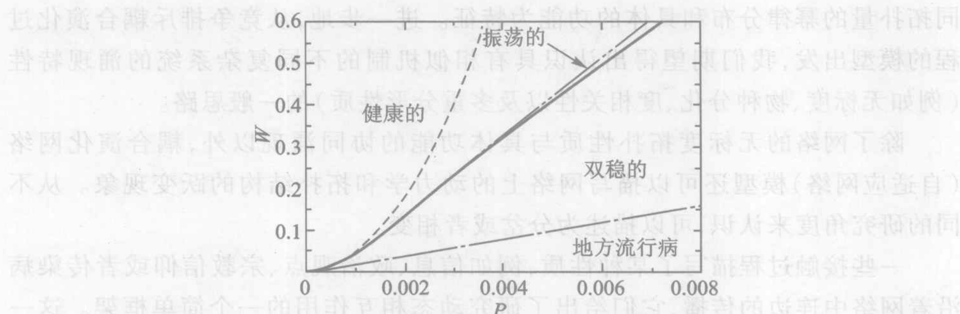


图 7.20 格罗斯(Gross)等人研究的两种参数的分岔图(引自文献[45])
分岔点将两种动力学机制的区域在参数空间分割开来,这两种动力学机制定性的来说是存在差别的。点划线标示了一个过渡临界分支,它对应于无疾病系统中流行病能够传染的阈值。系统中既有流行病能够继续存在的区域以鞍节点分支(虚线)、Hopf 分支(实线)和循环的褶皱分支(点线)为边界

导致全局结构的一个例证。

研究自适应网络的另一种方法是应用统计物理学思想,该方法可以以相变的形式来揭示临界点。这种相变的一个实例可以参看荷尔姆(Holme)和纽曼(Newman)合写的论文(文献[63])。该文特别讨论了人群中观念的形成,例如宗教信仰,其可能存在的信仰种数只受人群规模的限制。不同信仰的邻居之间以 ϕ 的概率说服对方,以 $1-\phi$ 的概率来重新选择邻居。最终,这会导致网络进入一个舆论状态,此时,网络分裂为一些不连通的子网,而每个子网中的人均拥有一致的观念。当 $\phi=1$ 时,人们的观念无变化,最终网络当中观念的分布与初始分布相同。当 $\phi=0$ 时,没有重连发生,在最终的舆论状态中,观念的种数不会超过网络初始状态时非连通子网的个数。应用有限尺寸的标度分析方法,纽曼和荷尔姆指出在这些极端状态的中间状态中,存在一个临界值 ϕ_c,在该处,网络会发生连续相变。并且在相变点,可以观察到临界转变的减慢过程。这样,网络需要一个相当长的时间来达到舆论状态。在这种状态,不同观念的信奉者人数趋向于幂律分布。

由荷尔姆和纽曼所提出的相变可能正是造成[63]中结果的关键因素。在另一篇文章中,吉尔(Gil)和詹尼特(Zanette)[64]用相似的模型研究了两种抵触观念之间的相互竞争。在这种情况下,矛盾通过说服邻居或者断开连接来解决。这表明,一个临界点是存在的,在该处,网络的舆论状态只有非常少的连接能够存在。基于之前的结果,我们可以猜想这是相变点附近临界慢化的直接结果。

由于耦合演化网络(自适应网络)模型能够同时描写复杂系统中相互作用结构和功能的涌现过程,它已经被人们广泛地关注,并且将会成为未来复杂网络

理论和实证研究的重要方向。目前已经有不少文章发表。一个比较全面的综述文章[65]已经刊载在 Journal of Royal Society—Interface 杂志上。

7.12 其他运用统计物理学方法的模型研究

7.12.1 WS 小世界模型和 BA 无标度模型的改进模型

WS 小世界模型和 BA 无标度模型在科学界,特别是理论物理学界产生了很大影响,有不少人追随他们,提出改进的模型或进行进一步的研究。本节列举这些论文中的一小部分。

纽曼等人(Newman 和 Watts)在 1999 年发表文献,其中特别值得注意的是讨论了 WS 小世界模型上信息或流行病传播的逾渗相变及其临界性质[66]。

多罗果夫切夫等人(Dorogovtsev 和 Mendes)在 2000 年发表文献,建议在 BA 无标度模型中增加对节点活性随年龄衰减的考虑。这样改造后的模型的平均场方程更难于求解,但是作者仍旧得出了解析结果[67]。这两位作者还在 2001 年建议在 BA 无标度模型中考虑节点数目加速增加的情况,并且同样作出了平均场解析[68]。

Chneg,Wang 和欧阳颀(Ouyang)在 2002 年建议了一个包含两类不同节点和两类不同边的网络演化模型,并且作了平均场解析[69]。作者们是从事包括生物系统的复杂系统研究的,他们很清楚在典型的复杂系统中基本单元和它们之间的作用都是多类型的。这篇论文提出的重要问题恐怕至今还没有受到足够重视。

7.12.2 一些网络拓扑统计性质的解析求解

清华大学的 Yao,Zhang,Chen 和 Li 在 2005 年报道了他们在广义 BA 无标度模型中用平均场方法和率方程对集群度分布以及集群度与度的相关性作了解析研究[70]。

南京航空航天大学的田亮、朱陈平、施大宁、古志鸣以及中国科技大学的周涛在 2006 年报道了他们建议的一个考虑节点不同活性,并且其活性可以改变的网络演化模型,并且用主方程和平均场方法解析得到了模型产生网络的度分布和集群系数[71]。

华中科技大学的关治宏和 Wu 在 2008 年建议了一个考虑节点之间物理位置及其距离的网络演化模型,并且用平均场方法作了解析[72]。

7.12.3 含权网网络演化模型

实际网络中节点之间的相互作用强度都是不同的,把作用强度作为边权是

合理的考虑,所以含边权网比不含权网含有更多的信息。约克等人(Yook, Jeong, Barabasi 和 Tu)在 2001 年可能首先建议含权的无标度网络演化模型,并且作了平均场分析[73]。

巴斯勒米等人(Barthelemy, Barrat, Pastor-Satorras 和 Vespignani)在 2005 年对含权网的研究作了一个综述[74],非常有参考价值。

Pan,李翔和汪小帆在 2006 年报道了对含权局域世界网络演化模型的研究,并且作了平均场近似的解析[75]。

7.12.4 生成函数的应用

搭拉斯塔等人(Dall'Asta, Marsili 和 Pin)在 2007 年发表预印件(文献[76]),建议了一个节点在进行某种任务时形成集体行为的模型,在解析中用到许多方法。作者们强调生成函数方法十分有用。

生成函数的应用十分广泛,7.12.5 节还要举出刘宗华和胡斑比用生成函数方法求解流行病传播模型的例子。

7.12.5 复杂网络上流行病的传播的一些解析研究

复杂网络上物质、信息或者能量的传播是具有重要理论和实际意义的研究课题,本书在第八章中还要更仔细地介绍。

克莱兹科夫斯基等人(Kleczkowski 和 Grenfell)在 1999 年报道了他们对小世界网络上麻疹一类(康复后可免疫)流行病传播的研究。作者列出了作为平均场近似的 SIR 方程,并且得到了解析解[77]。这可能是第一篇关于复杂网络上流行病传播的重要论文,它说明了小世界网络中的少数随机跳跃边大大加快了流行病的传播。

帕斯托等人(Pastor-Satorras 和 Vespignani)在 2001 年用平均场近似(SIS 方程)解析地讨论了无标度网络上肺结核一类(康复后不可免疫)流行病的传播。这篇论文影响很大,发表后引起了热烈的讨论。这主要是由于它的平均场解析导出了一个重要结论,即一个无标度网络上流行病传播的有效传染概率阈值为零[78]。以文献[79,80]为代表的一批论文在此后热烈的讨论了这个问题,指出了例如网络大小、网络集团结构等多种因素对流行病传播阈值的影响。

在文献[37]中,刘宗华和胡斑比曾经用生成函数方法帮助求解一个他们提出的在具有群落结构的复杂网络上流行病传播的模型,这是另一个生成函数方法在复杂网络研究中应用的例子。

Shi、段志生和陈关荣在 2008 年用平均场方法(SIS 方程)解析讨论了一个有新特色的、各种拓扑结构复杂网络上流行病的传播模型,并且建议了防止流行病传播的新策略[81]。

7.12.6 一些可严格解析的复杂网络模型

利用数学家研究的结论，构造可严格解析的网路模型，以求对复杂网络的拓扑结构与统计性质的关系有更好理解，这是网络研究的一个方向。本节仅举两个例子。

周涛、严钢和汪秉宏提出了随机阿波罗网络(RAN)模型[82]。它由阿波罗网络[83]引入随机化规则得到，是一种最大可平面网络。RAN具有较大的集群系数和较小的平均距离，同时兼有小世界与无标度两种特征，并且集群系数与度的相关性遵从 $C(k) \sim k^{-1}$，很好地反映了真实系统的统计性质。他们采用率方程方法解析得到了度分布的幂律指数和集群系数的表达式。此外，他们还研究了RAN的鲁棒性、渗流和流行病传播过程，发现RAN对于恶意攻击的反应在节点数目 N 较小时不敏感地依赖于 N，这与BA网络的情况相反。对于流行病的早期传染速度，在RAN上的传播比BA网络上慢。这可能表明，大的集群系数会降低流行病在爆发期的传播速度。另外，吴枝喜等人[84]另辟蹊径，采用主方程方法给出了RAN度分布的严格推导过程，他们的结果与周涛等人的解析表达式具有相同的渐近行为。

第七章参考文献

[1] R. Albert and A – L. Barabási, Rev. Mod. Phys. ,74(2002)47.

[2] D. J. Watts and S. H. Strogatz, Nature, 393(1998)440.

[3] A – L. Barabasi and R. Albert, Science, 286(1999)509.

[4] 汪小帆，李翔，陈关荣．复杂网络理论及其应用．北京：清华大学出版社，2006.

[5] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes and A. N. Samukhin, Phys. Rev. Lett., 85 (21) (2000)4633.

[6] 史定华，刘黎明．演化网络——模型、测度及方法．//郭雷，许晓明，等．复杂网络．上海：上海科技出版社，2006：1－27.

[7] P. L. Krapivsky, S. Redner and F. Leyvraz F, Phys. Rev. Lett. ,85(21)(2000)4629.

[8] 史定华．复杂网络的随机刻画和演化规律．将发表于《力学进展》,2008.

[9] P. P. Zhang, K. Chen, Y. He, T. Zhou, B. B. Su, Y. Jin, H. Chang, Y. P. Zhou, L. C. Sun, B. H. Wang and D. R. He, Physica A, 360(2006)599.

[10] H. Chang, B. B. Su, Y. P. Zhou and D. R. He, Physica A, 383(2007)687.

[11] M. E. J. Newman, Phys. Rev. E, 64(2001)016131; 64(2001)016132.

[12] A – L. Barabasi, H. Jeong, Z. Neda et al. , Physica A, 311(2002)590.

[13] Z. Liu, Y. C. Lai, N. Ye and P. Dasgupta, Phys. Lett. A, 303(2002)337.

[14] P. L. Krapivsky, S. Redner and F. Leyvraz, Phys. Rev. Lett. ,85(2000)4629.

[15] Z. Liu, Y. C. Lai and N. Ye, Phys. Rev. E, 66(2002)036112.

[16] T. Zhou, B. H. Wang, Y. Jin, D. R. He, P. P. Zhang, Y. He, B. B. Su, K. Chen, Z. Z. Zhang and J. G. Liu, Int. J. Mod. Phys. C, 18(2007)297.

[17] X. Li and G. R. Chen, Physica A, 328(2003)274.

[18] X. Li, Y. Y. Jin, G. Chen, Physica A, 328(2003)287.

[19] T. Antal and P. L. Krapivsky, Phys. Rev. E, 71(2005)026103.

[20] A. Barrat, M. Barthelemy and A. Vespignani, Phys. Rev. Lett., 92(2004)228701.

[21] A. Barrat, M. Barthelemy and A. Vespignani, Phys. Rev. E, 70(2004)066149.

[22] W. X. Wang, B. H. Wang, B. Hu, G. Yan and Q. Ou, Phys. Rev. Lett., 94(2005)188702.

[23] W. X. Wang, B. Hu, T. Zhou, B. H. Wang and Y. B. Xie, Phys. Rev. E, 72(2005)046140.

[24] Z. Wu, X. Xu and Y. Wang, Phys. Rev. E, 71(2005)066124.

[25] W. X. Wang, B. Hu, B. H. Wang and G. Yan, Phys. Rev. E, 73(2006)016133.

[26] M. Tang, Z. Liu and J. Zhou, Phys. Rev. E, 74(2006)036101.

[27] M. Tang and Z. Liu, Commun. Theo. Phys., 49(2008)252.

[28] M. Tang, Z. Liu, X. Zhu and X. Wu, Int. J. Mod. Phys. C, 19(2008)927.

[29] A. Barrat, M. Barthelemy, R. Pastor - Satorras and A. Vespignani, Proc. Natl. Acad. Sci., 101 (2004)3747.

[30] S. Maslov and K. Sneppen, Science, 296(2002)910.

[31] V. M. Eguiluz, G. Cecchi, D. R. Chialvo, M. Baliki and A. V. Apkarian, e - print cond - mat/0309092.

[32] B. J. Kim, Phys. Rev. E, 69(2004)045101.

[33] P. Holme and B. J. Kim, Phys. Rev. E, 65(2002)026107.

[34] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes and A. N. Samukin, Phys. Rev. E, 63(2001)062101.

[35] X. Wu and Z. Liu, Physica A, 387(2008)623.

[36] M. E. J. Newman, Phys. Rev. E, 64(2001)025102.

[37] Z. Liu and B. Hu, Euro. Phys. Lett., 72(2005)315.

[38] E. M. Jin, M. Girvan and M. E. J. Newman, Phys. Rev. E, 64(2001)046132.

[39] J. Davidsen, H. Ebel and S. Bornholdt, Phys. Rev. Lett., 88(2002)128701.

[40] M. E. J. Newman, Phys. Rev. E, 68(2003)026121.

[41] J. D. Noh, H. Jeong, Y. Ahn and H. Jeong, Phys. Rev. E, 71(2005)036131.

[42] Q. Xuan, Y. Li and T. Wu, Phys. Rev. E, 73(2006)036105.

[43] R. Albert and A - L. Barabási, Phys. Rev. Lett., 85 (2000) 5234; S. Mossa, M. Barthelmy, H. E. Stanley and L. A. N. Amaral, Phys. Rev. Lett., 88 (2002) 138701; G. Bianconi and M. Marsili, Phys. Rev. E, 70(2004)035105; K. Park and Y. C. Lai, Phys. Rev. E, 72(2005) 026131.

[44] A. Barrat, M. Barthelemy and A. Vespignani, Phys. Rev. Lett., 92 (2004) 228701; S. Bornholdt and T. Rohlf, Phys. Rev. Lett., 84 (2000) 6114; C. P. Zhu, S. J. Xiong, Y. J. Tian, N. Li and K. S. Jiang, Phys. Rev. Lett., 92 (2004) 218702; P. Fronczak, A. Fronczak and J. Holyst, Phys. Rev. E, 73 (2006) 046117; Y. B. Xie, W. X. Wang and B. H. Wang, Phys. Rev. E, 75 (2007) 026111; M. G. Zimmermann, V. M. Eguluz and

M. S. Miguel, Phys. Rev. E, 69(2004)065102; P. Holm and M. E. J. Newman, Phys. Rev. E, 74(2006)056108; M. Liu and K. E. Bassler, Phys. Rev. E, 74(2006)041910; C. S. Zhou and J. Kurths, Phys. Rev. Lett., 96 (2006) 164102; J. M. Pacheco, A. T. Traulsen and M. A. Nowak, Phys. Rev. Lett., 97(2006)258103.

[45] T. Gross, C. Dommar D'Lima and B. Blasius, Phys. Rev. Lett., 96(2006)208701.

[46] R. Albert and A-L. Barabási, Phys. Rev. Lett., 85 (2000) 5234; S. Mossa, M. Barthelmy, H. E. Stanley and L. A. N. Amaral, Phys. Rev. Lett., 88 (2002) 138701; G. Bianconi and M. Marsili, Phys. Rev. E, 70(2004)035105; K. Park and Y. C. Lai, Phys. Rev. E, 72(2005) 026131; T. Zhou, B. H. Wang, P. L. Zhou, C. X. Yang and J. Liu, Phys. Rev. E, 72 (2005)046139.

[47] Chapman J L and Reiss M J. Ecology: Principles and Applications. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999:110.

[48] C. P. Zhu, T. Zhou, H. J. Yang, S. J. Xiong, Z. M. Gu, D. N. Shi, D. R. He and B. H. Wang, New J. Phys., 10(2008)023006.

[49] P. Dittrich, F. Liljeros, A. Soulier and W. Banzhaf, Phys. Rev. Lett., 84 (2000) 3205; A. Soulier and T. Halpin-Healy, Phys. Rev. Lett., 90 (2003) 258103; A. Grolund and P. Holme, Phys. Rev. E, 70(2004)036108.

[50] T. Kalisky, L. A. Braunstein, S. V. Buldyrev, S. Havlin and H. E. Stanley, Phys. Rev. E, 73 (2006)025103.

[51] A. Vázquez, Phys. Rev. E, 67(2003)056104.

[52] D. Braha and Y. Bar-Yam, Phys. Rev. E, 69(2004)016113; C. R. Myers, Phys. Rev. E, 68 (2003)046116.

[53] S. Fotunato et al., Phys. Rev. Lett., 96(2006)218701.

[54] A. Chahabra and R. V. Jensen, Phys. Rev. Lett., 62(1989)1389; C. P. Zhu and S. J. Xiong, Phys. Rev. B, 63(2001)193405.

[55] H. A. Makse, S. Havlin and H. E. Stanley, Nature, 377(1995)608.

[56] R. Pastor-Satoras, A. Vazquez and A. Vespignani, Phys. Rev. Lett., 87(2001)258701.

[57] J. Ozik and P. J. Roebber, Phys. Rev. E, 72(2005)046213.

[58] A. A. Tsonis and P. J. Roebber, Physica A, 333(2004)497.

[59] D. I. Iudin and D. B. Gelashvily, Nucl. Instrum. Methods A, 502(2003)799; S. Souissi et al., Nonlinear Anal.: Real World Appl., (2005)6705.

[60] P. Cano and M. Koppenberger. Proc. 5th Int. Symp. on Music Inf. Retr. (ISMIR'04), (Barcelona, Spain, 2004, October).

[61] Back T, Fogel D B, Michalewicz Z. Handbook of Evolutionary Computation. Bristol: Institute of Physics Publishing, 1997.

[62] G. C. Ehrhardt, M. A. Marsili and F. Vega-Redondo, Phys. Rev. E, 74(2006)036106.

[63] P. Holme and M. E. J. Newman, Phys. Rev. E, 74(2007)056108.

[64] S. Gil, Phys. Lett. A, 356 (2006) 89; D. H. Zanette and S. Gil, Physica D, 224 (1-2) (2006)156.

[65] T. Gross and B. Blasius, J. Royal Soc. —Interface, 5(2008)259.

[66] M. E. J. Newman and D. Watts, Phys. Rev. E, 60(6)(1999)7332.

[67] S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes, Phys. Rev. E, 62(2)(2000)1842.

[68] S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes, Phys. Rev. E(R), 63(2001)025101.

[69] X. Chneg, H. Wang and Q. Ouyang, Phys. Rev. E, 65(2002)066115.

[70] X. Yao, C. S. Zhang, J. W. Chen and Y. D. Li, Physica A, 353(2005)661.

[71] L. Tian, C. P. Zhu, D. N. Shi, Z. M. Gu and T. Zhou, Phys. Rev. E, 74(2006)046103.

[72] Z. H. Guan and Z. P. Wu, Physica A, 387(2008)314.

[73] S. H. Yook, H. Jeong, A-L. Barabasi and Y. Tu, Phys. Rev. Lett., 86(25)(2001)5835.

[74] M. Barthelemy, A. Barrat, R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, Physica A, 346(2005)34.

[75] Z. Pan, X. Li and G. R. Chen, Phys. Rev. E, 73(2006)056109.

[76] L. Dall'Asta, M. Marsili and P. Pin, ArXiv: 0712.3906v1 [physics. soc - ph].

[77] A. Kleczkowski and B. T. Grenfell, Physica A, 274(1999)355.

[78] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, Phys. Rev. Lett., 86(2001)3200.

[79] V. M. Eguíluz and K. Klemm K, Phys. Rev. Lett., 89(10)(2002)108701.

[80] R. Pastor - Satorras and A. Vespignani A, Phys. Rev. E, 65(2002)035108(R).

[81] H. Shi, Z. S. Duan and G. R. Chen, Physica A, 387(2008)2133.

[82] T. Zhou, G. Yan, and B. H. Wang, Phys. Rev. E, 71(2005)046141.

[83] J. S. Andrade, Jr. H. J. Herrmann, R. F. S. Andrade and L. R. da Silva, Phys. Rev. Lett., 94 (2005)018702.

[84] Z. X. Wu, X. J. Xu and Y. H. Wang, Phys. Rev. E, 73(2006)058101.

第八章　复杂网络上的物理传输过程

复杂网络上的物理传输过程非常丰富,如节点间的同步化与耦合方向检测,粒子在各节点间的扩散与凝聚,热能借助于网络结构的输送,复杂网络上舆论与流行病的传播,以及因特网上的信息包传递与交通堵塞等。一般来说,这些物理过程可以分为两类:遵从物质守恒原理的过程与不遵从物质守恒原理的过程。不遵从物质守恒原理的过程通常与信息有关,属于信息传播的范畴,这里一个节点可以将它的信息同时传给多个节点,也可以将它消灭,如复杂网络上节点间的耦合作用及耦合导致的同步化与方向检测等应用,流行病与舆论的传播等(我们在8.2节中把流行病与舆论的传播作为同一个专题一起讨论)。与此相反,复杂网络上的另一些动力学过程则遵从物质守恒原理,这里的物质虽然可以被分解为若干小单元进行传递与输运,但既不会增多也不会减少。

关于复杂网络上节点间的同步化,因其他专著上已有较详细的讨论,我们这里就不再重复。复杂网络上耦合方向的检测则是一个新的研究热点,其潜在的应用背景为大脑癫痫病发作前焦点位置的辨认。对这个问题的研究目前刚刚开始,还远未到总结的时候,因此这里也不进行探讨。这样一来,本章的任务就是对复杂网络上的流行病与舆论的传播,因特网上的信息包传递与交通堵塞,以及粒子扩散与热能输送等方面所取得的成果进行阶段性总结。

8.1　流行病传播的基本模型

网络上的信息传播可追溯到两千年前耶稣为福音的传播而建立的基督教网络,那里慕道人为节点,牧师为关键节点,而慕道人与牧师间的关系及慕道人相互间的关系为网络连线。有了基督教这个网络,耶稣的精神得以迅速蔓延开来。圣经借助于基督教会的传播就是典型的信息在复杂网络上的传播。对这个问题的理论研究直到1998年后才由于小世界与无标度网络的发现而引起重视,并于近十年来得到了迅速的发展。信息传播的直接表现形式为舆论传播,另一形式则为病毒或流行病在各种复杂网络上的传播。流行病在复杂网络上的传播理论近年来获得了巨大的成功,其主要原因之一是整个社会对这个问题的重视。重视的原因之一是流行病传播的速度相当快,并因此引起了一系列的社会问题,如因特网上的病毒蔓延,人类社会中的非典型肺炎(SARS)恐慌及各种性疾病尤其

是艾滋病的广泛传播等[1-3]，而这又与现代交通、媒体等人类交际手段的空前发展根本性地改变了人际关系网络结构密切相关。

研究流行病传播问题，必须对特殊传染疾病在给定网络上的传播建模，其目的在于重现传染病的真实动力学并设计出控制或可能根治疾病的途径。这些数学模型就可以成为研究传染病的重要工具，可用来评估传染病的威胁程度，预报传染病（如天花、麻疹、腮腺炎、水痘、登革热、流行性感冒、结核病、艾滋病及手足口病等）的暴发[4-6]。依靠这些数学模型我们还可以研究复杂网络中的流言传播、计算机病毒在计算机网络上的蔓延等。

一个基本假设是：能够感染或传播信息或流行病的个体位于一个复杂网络的各个节点上，传染只能通过节点间的连边进行，传染效率由传染率（即易感人群与一个感染患者接触而获得感染的概率）决定。用 λ 表示传染率，则流行病在网络中的平均波及范围与其传染率 λ 正相关。流行病传播中一个重要的量是传染阈值 λ_c。对于一个节点数目非常大的网络系统，当传染率满足 $\lambda<\lambda_c$ 时，受感染的人数所占总人数的比例几近于零；而当 $\lambda>\lambda_c$ 时，受感染的人数就会达到一个有限大小的比例[7,8]。因此流行病传播的研究中，人们主要把注意力放在研究不同网络模型下病毒传播的阈值问题[9-14]。

实际中，流行病传播是一个非常复杂的过程，其结果依赖于具体的情形。比如，有些疾病有免疫能力，人被感染一次后就不能再被感染，如腮腺炎、麻疹等，而另一些疾病没有免疫能力，人可以被反复感染，如计算机病毒、肺结核与淋病等。因此，有必要建立不同的模型来描述它们。事实上，按照粗粒化的描述方式，人们已经建立了大量的模型来描述不同的流行病传播情形。其中，对应于上述的、按照能不能被反复感染来划分的两种典型的模型分别为 SIS（易感－感染－易感）模型与 SIR（易感－感染－免疫）模型，而无标度网以其最能真实反映社会网的拓扑结构而成为研究中最常使用的网络模型。这里我们对几种常用的模型作一简单介绍。

8.1.1 SIS 模型

在 SIS 模型里，人群被划分为两类：易感人群（S）和染病人群（I）。染病人群为传染的源头，它通过一定的概率 λ 把传染病传给易感人群。染病人群本身也有一定的概率 u 可以被治愈；易感人群一旦被感染，就又成为了新的传染源[10,13,15-17]。SIS 模型的感染机制可以用下式表示

$$\begin{aligned} S(i)+I(j) &\xrightarrow{\lambda} I(i)+I(j), \\ I(i) &\xrightarrow{u} S(i). \end{aligned} \tag{8.1}$$

用 $s(t)$，$i(t)$ 分别标记群体中个体在时刻 t 处于 S 态和 I 态的密度，当易感人群

和染病人群充分混合时,其动力学可以用下列微分方程组描述

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda i(t)s(t) + ui(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda i(t)s(t) - ui(t), \end{cases} \tag{8.2}$$

此方程中存在一个阈值 λ_c,当 $\lambda < \lambda_c$ 时其定态解为 $i(T) = 0$,而当 $\lambda > \lambda_c$ 时其定态解为 $i(T) > 0$,这里 T 为达到稳定态的时间。

8.1.2 SIR 模型

SIR 模型将人群划分为三类:易感人群(S)、染病人群(I)和免疫人群(R)[7,8]。免疫人群是被治愈并获得了免疫能力,或者是已经死亡,即不再对相应动力学行为产生任何影响的那些节点。SIR 模型适合于描述那些染病者在治愈后可以获得终生免疫能力的疾病,如麻疹、腮腺炎、水痘、百日咳等,或者是那些几乎不可避免走向死亡的疾病,如艾滋病等[18-22]。不同于 SIS 模型,这里染病人群将不再变为易感人群而是以概率 u 变为免疫人群。一旦成为免疫人群,则不可以再被感染。在每一个给定的时间,个体处于三态之一,其动力学方程如下

$$\begin{aligned} &S(i) + I(j) \xrightarrow{\lambda} I(i) + I(j), \\ &I(i) \longrightarrow R(i). \end{aligned} \tag{8.3}$$

用 $s(t)$, $i(t)$, $r(t)$ 分别标记群体处于 S 态、I 态和 R 态的密度。当易感人群和染病人群充分混合时,SIR 模型的动力学可以用下列微分方程组描述

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda i(t)s(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda i(t)s(t) - ui(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} = ui(t). \end{cases} \tag{8.4}$$

随着时间进行,感染人数将逐步增加。充分长的时间后,感染人数将因易感人群的不足而开始减少,直至感染人数变为零,传染过程结束。因此,最后的感染密度 $r(T)$ 与感染率 λ 间存在着一一对应的关系,且 $r(T)$ 可被用来测量传染的有效性,这里 T 为传染过程结束的时间。SIR 模型也存在一个阈值 λ_c,当 $\lambda < \lambda_c$ 时感染无法扩散出去,而当 $\lambda > \lambda_c$ 时传染爆发并变为全局性的。

8.1.3 其他模型

SIS 模型与 SIR 模型的区别为:SIS 模型的终态为稳定态,如振荡态或不动

点,低于临界点时终态为零;而 SIR 模型的终态为无感染态,低于临界阈值时总感染人数的密度为零。除了这两个典型的模型外,还有其他一些比较常用的模型,如 SI,SIRS 及 SEIR 模型等。

在 SI 模型里,个体一旦被感染就会永久地处于感染态[23-25]。这个模型通常描述那些染病后不能治愈的疾病,或对于突然爆发尚缺乏有效控制的流行病,如黑死病及非典型肺炎等。另外,在疾病爆发早期常使用 SI 模型进行分析,它的感染机制可以用下式表示

$$S(i)+I(j)\xrightarrow{\lambda}I(i)+I(j). \tag{8.5}$$

SI 模型的动力学可用下列微分方程组描述

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda i(t)s(t),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda i(t)s(t).\end{cases} \tag{8.6}$$

在 SIRS 模型中,易感人群可通过与染病人群接触而变为染病人群,染病人群则在一定的感染时间 T_I 后变为免疫人群,而免疫人群在一定的恢复时间 T_R 后又变成易感人群[26,27]。SIRS 模型为可激系统,在平均场框架下可显示弛豫振荡。

在 SEIR 模型中,易感态与感染态间存在一个潜伏态[28,29]。易感人群与染病人群接触后先变为潜伏态,然后再变为感染态。这套状态并不严格地对应于任何特定的疾病,而是考虑一大类不同的病毒传递中最相关的特征与参数。其动力学方程如下

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=-w_{s\to e}e(t)s(t),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}=w_{s\to e}e(t)s(t)-w_{e\to i}e(t),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=w_{e\to i}e(t)-w_{i\to r}i(t),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}=w_{i\to r}i(t),\end{cases} \tag{8.7}$$

其中 $w_{s\to e}$,$w_{e\to i}$,$w_{i\to r}$ 分别为从易感态到潜伏态,从潜伏态到感染态以及从感染态到免疫态的概率。其相关的情形为季节性的感冒或非典状疾病等[5,6]。

8.2 复杂网络上的流行病传播

按照度分布,复杂网络可分为均匀网与非均匀网,它们的流行病传播是不同的。对于前者,其动力学可由平均场或均匀混合方法给出;而对于后者,我们必

须考虑度分布的影响。如果一个网络的度分布在某一平均值附近且度分布指数衰减,则度分布范围不大,可看作均匀的,这样的网络称为均匀网,如随机网与小世界网等。当网络的度分布满足幂率或度分布的范围很大时,应看作不均匀,这样的网络称之为非均匀网,如 BA 无标度网等。本节将简单介绍流行病在均匀与非均匀网上的传播,并介绍无标度网上零传播阈值的有趣结论[15]。

8.2.1 均匀网中的流行病传播

在均匀网中,每个节点的度近似等于网络节点的平均度,即 $k \approx <k>$。我们首先考虑 SIS 模型。在每一个时间步,如果与一个或多个感染节点接触,则一个易感节点将以概率 v 被感染。同时,感染节点以概率 u 被治愈,然后再次变成易感态。令有效传染率为 $\lambda = v/u$,不失一般性,令 $u=1$,这种做法只是改变演化时间的尺度而已。在流行病的研究中,最重要的是非零阈值 λ_c 的一般预言[7,8],因为当 λ 小于阈值 λ_c 时感染以指数速度衰亡。我们这里介绍平均场理论对均匀网情形的处理[30]。被感染节点的密度随时间的演化满足如下方程

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\rho(t) + \lambda <k> \rho(t)[1-\rho(t)], \tag{8.8}$$

上式中,右边第一项表示感染节点以单位速率减少,第二项表示新感染的节点数目正比于传染率 λ、从每个节点发出的连线数、及给定连线指向易感人群的概率 $\rho(t)[1-\rho(t)]$。由于均匀网只有非常小的涨落,我们取 $k \approx <k>$ 作为一级近似。使用定态条件 $d\rho(t)/dt=0$ 可得到

$$\rho[-1+\lambda <k> (1-\rho)] = 0, \tag{8.9}$$

这里 ρ 为感染节点的定态密度。此方程给出流行病传播的阈值为 $\lambda_c = <k>^{-1}$,且

$$\begin{aligned} &\rho = 0, \quad \text{若 } \lambda < \lambda_c, \\ &\rho \sim \lambda - \lambda_c, \quad \text{若 } \lambda \geqslant \lambda_c. \end{aligned} \tag{8.10}$$

对于 SIR 模型,易感人群 $s(t)$、染病人群 $i(t)$ 和免疫人群 $r(t)$ 的密度满足守恒条件

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1, \tag{8.11}$$

且它们三者服从如下的微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{ds(t)}{dt} = -\lambda <k> i(t)s(t), \\ \dfrac{di(t)}{dt} = \lambda <k> i(t)s(t) - i(t), \\ \dfrac{dr(t)}{dt} = i(t). \end{cases} \tag{8.12}$$

这组方程基于均匀混合假设,其传染正比于染病人群的密度。事实上,均匀混合

假设等价于平均场处理,即各易感节点与感染节点有相同程度的接触。此模型的另一个隐含假设是疾病的时间尺度远小于个体的寿命,因此在方程中并没有包含个体的出生与死亡率。

不同于 SIS 模型,这里传染效率是以最后的感染人口 r_∞ 来衡量的。当 λ 低于阈值 $\lambda<\lambda_c$ 时,$r_\infty=\lim_{t\to\infty} r(t)$ 在非常大的人口极限下为无穷小;而当 λ 大于阈值($\lambda>\lambda_c$)时,疾病传播并感染有限比例的人群。在初始条件 $r(0)=0$ 与 $s(0)\approx 1$(即假定 $i(0)\approx 0$)下,我们得到

$$s(t)=\mathrm{e}^{-\lambda<k>r(t)}. \tag{8.13}$$

将此结果与条件(8.11)结合,可得到总感染人数 r_∞ 满足下列自洽方程

$$r_\infty=1-\mathrm{e}^{-\lambda<k>r_\infty}. \tag{8.14}$$

为了得到非零解,必须满足下列条件

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda<k>r_\infty}\right)\right|_{r_\infty=0}>1. \tag{8.15}$$

这个条件等价于限制 $\lambda>\lambda_c$,其阈值在这个特殊情形下取 $\lambda_c=<k>^{-1}$。在 $\lambda=\lambda_c$ 处进行泰勒展开,可得传染效率为

$$r_\infty\sim(\lambda-\lambda_c). \tag{8.16}$$

8.2.2　非均匀网中的流行病传播

在无标度网路中,由于度分布满足幂率分布,一个随机选取的节点倾向于连接关键节点或连接度大的节点,因此度大的节点就容易感染,然后作为种子去感染其他人,从而导致比均匀网络上更快的流行病传播。为了刻画网络拓扑的影响,可将节点划分为不同的组,各组中的节点具有相同的度[10,15,16,19,30]。对 SIS 模型,用 ρ_k 代表度为 k 的组中感染节点的密度,则 ρ_k 满足下列微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\rho_k(t)}{\mathrm{d}t}=-\rho_k(t)+\lambda k[1-\rho_k(t)]\sum_{k'}P(k'\mid k)\rho_{k'}(t), \tag{8.17}$$

其中,右边第一项描述由于单位恢复率导致的感染群体的湮灭;第二项为产生项,正比于易感人群的密度 $1-\rho_k$ 乘以传播率 λ、邻居数 k、及任意邻居被感染的概率,后者为从一个度为 k 的节点连向度为任意 k' 的节点的联合概率 $P(k'|k)\rho_{k'}$ 的平均。这个方程因忽略了密度－密度及度关联的高阶项而可看作某种程度的近似。将 $\sum_{k'}P(k'\mid k)\rho_{k'}(t)$ 记作 $\Theta(\rho(t))$,则方程(8.17)变为

$$\frac{\mathrm{d}\rho_k(t)}{\mathrm{d}t}=-\rho_k(t)+\lambda k[1-\rho_k(t)]\Theta(\rho(t)). \tag{8.18}$$

在定态,ρ 只是 λ 的函数,因此概率 Θ 也变成 λ 的隐函数。令 $\partial_t\rho_k(t)=0$,我们有

$$\rho_k = \frac{\lambda k\Theta(\lambda)}{1 + \lambda k\Theta(\lambda)}. \tag{8.19}$$

对非关联网络,概率 $P(k'|k)$ 等于 $kP(k)/<k>$,因此 Θ 可被写为

$$\Theta = \sum_{k'} P(k' \mid k)\rho_{k'} = \frac{1}{<k>}\sum_k kP(k)\frac{\lambda k\Theta(\lambda)}{1 + \lambda k\Theta(\lambda)}. \tag{8.20}$$

这是一个自洽方程,可用来求解 $\Theta(\lambda)$ 及通过(8.19)求解 ρ_k,最后我们可以用下列关系来估算序参量 ρ:

$$\rho = \sum_k P(k)\rho_k. \tag{8.21}$$

求解方程(8.20),可求得非均匀网络上 SIS 模型传播的阈值为[31]

$$\lambda_c = \frac{<k>}{<k^2>}. \tag{8.22}$$

对于无限大的具有度分布 $P(k) \sim k^{-\gamma}$ 与 $\gamma \leqslant 3$ 的网络,有 $<k^2> = \infty$,对应地 $\lambda_c = 0$,即在无标度网络中,无论传染概率多么小,流行病都能持久存在,这个结果很好地解释了为什么病毒与舆论可以在因特网与社会网络中传播的如此快,并在当时引起了轰动效应。

对于 SIR 模型,用 $s_k(t)$,$i_k(t)$,$r_k(t)$ 来分别表示一个度为 k 的组中易感、感染及免疫人群的密度,则它们由归一化条件联系在一起:

$$s_k(t) + i_k(t) + r_k(t) = 1. \tag{8.23}$$

作与 SIS 模型类似的分析,我们得到下列动力学演化方程:

$$\begin{cases} \dfrac{ds_k(t)}{dt} = -\lambda k s_k(t)\Theta(t), \\ \dfrac{di_k(t)}{dt} = -i_k(t) + \lambda k s_k(t)\Theta(t), \\ \dfrac{dr_k(t)}{dt} = i_k(t). \end{cases} \tag{8.24}$$

方程(8.24)可在初始条件 $r_k(0) = 0$,$i_k(0) = i^0$ 及 $s_k(0) = 1 - i^0$ 下求解。在极限 $i^0 \to 0$ 时,我们可取 $i_k(0) \approx 0$,$s_k(0) \approx 1$。在这个近似下,方程(8.24)可被直接积分得

$$s_k(t) = e^{-\lambda k\phi(t)}, \tag{8.25}$$

其中 $\phi(t)$ 为辅助函数:

$$\phi(t) = \int_0^t \Theta(t')dt' = \frac{1}{<k>}\sum_k kP(k)r_k(t). \tag{8.26}$$

辅助函数的变化可由其对时间的导数给出

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{1}{<k>}\sum_k kP(k)i_k(t)$$

$$= \frac{1}{<k>}\sum_{k} kP(k)(1 - r_k(t) - s_k(t)) \tag{8.27}$$

$$= 1 - \phi(t) - \frac{1}{<k>}\sum_{k} kP(k)s_k(t).$$

将已得到的 $s_k(t)$ 的表达式(8.25)代入可得关于 $\phi(t)$ 的微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} = 1 - \phi(t) - \frac{1}{<k>}\sum_{k} kP(k)\mathrm{e}^{-\lambda k\phi(t)}. \tag{8.28}$$

方程(8.28)为关于 $\phi(t)$ 的自洽方程,可在给定 $P(k)$ 下进行求解。一旦求解了方程(8.28),我们就可以得到作为 $\phi_\infty = \lim\limits_{t\to\infty}\phi(t)$ 的函数的总的传播效率 r_∞。由于 $r_k(\infty) = 1 - s_k(\infty)$,我们得到

$$r_\infty = \sum_{k} P(k)(1 - \mathrm{e}^{-\lambda k\phi_\infty}). \tag{8.29}$$

我们也可以计算阈值 λ_c。由于 $i_k(\infty) = 0$ 与 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} = 0$,从方程(8.28)我们得到下列关于 ϕ_∞ 的自洽方程:

$$\phi_\infty = 1 - \frac{1}{<k>}\sum_{k} P(k)\mathrm{e}^{-\lambda k\phi_\infty}. \tag{8.30}$$

为了得到非零解,必须满足如下条件:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi_\infty}\left(1 - \frac{1}{<k>}\sum_{k} P(k)\mathrm{e}^{-\lambda k\phi_\infty}\right)\bigg|_{\phi_\infty = 0} > 1, \tag{8.31}$$

这个关系意味着:

$$\frac{1}{<k>}\sum_{k} P(k)(\lambda k) = \lambda\frac{<k^2>}{<k>} > 1. \tag{8.32}$$

从而阈值为

$$\lambda_c = \frac{<k>}{<k^2>}, \tag{8.33}$$

其与 SIS 模型的方程(8.22)完全相同。

8.3 复杂网络上的舆论传播

另一种信息传播的形式为舆论传播,其动力学行为也服从 SIR 模型。由于其自身的特点,它的三种状态代表的意义与流行病情形略微有些不同[9,32-35]。这里的 S,I,R 所对应的分别是不知道消息的人群,知道消息的并有能力继续传播消息的人群,及知道消息但已经失去传播能力或兴趣的人群。我们假设网络上有 N 个节点,每个代表一个可传播消息的个人,他们传播消息的行为方式如下:如果得到了一个消息(I 态),那么他就有兴趣把这个消息传播出去,在传播过程中,他将随机地从邻居中选取一人并将消息传给他,如果这个邻居不知道这

个消息(S 态),则该邻居就得到此消息(I 态),并进行下一轮的传播。但如果他的邻居已经知道了这个消息,那么传播消息的人会认为该消息失去了继续传播的价值,并失去传播该消息的兴趣(R 态)。整个过程可以由以下关系简单的表示出来:

$$
\begin{aligned}
&I(i) + S(j) \to I(i) + I(j), \\
&I(i) + I(j) \to R(i) + I(j), \\
&I(i) + R(j) \to R(i) + R(j),
\end{aligned}
\tag{8.34}
$$

我们假设在一个有限网络中所有的节点都处于 S 态,在某一时刻突然有一个节点得到了一个新的消息,它将成为 I 态。那么按照上面所定义的规则,这个消息将在网络中传播,直到最终网络中没有 I 态的节点为止。我们称这个状态为终态。这个问题首先由萨德布里(Sudbury)进行了研究[32],最近则由扎纳特(Zanette)[33]与刘宗华等[9,35]进行了讨论。萨德布里提出一个随机网的 SIR 模型:在一个村庄中随机选取两个节点(人)并让他们进行一次电话通话来传递消息,萨德布里发现舆论最多只能传递到 80% 的人群。扎纳特借助于平均场理论研究了舆论在小世界网上的传播,发现获知舆论的人少于 80%。刘宗华等则研究了舆论在一般网络上的传播情形,发现随机网最易传播舆论。我们这里主要介绍文献[35]的结果。

网络结构的非均匀性带来的影响可用图 8.1 进行说明:考虑两个相邻节点 A 与 B,它们由一条边联系。假定节点 A 知道消息并于时间 t 将消息传给节点 B。则在时刻 $t+1$,节点 B 将选取一个邻居作为目标来传递消息。由于 A 为 B 的“父”点,A 与 B 的其他邻居所处的地位就将不一样。一旦 A 被选取为 B 传递消息的邻居,按照传播规则,B 将肯定变为 R 态;而当 B 的其他邻居被选取时,B 将依据当时的情形来决定是保留在 I 态还是变为 R 态,即 B 变为 R 态的概率小于 1。如果 B 的度为 k,则选择 A 的概率为 $1/k$,而选择其他邻居的概率为 $1-1/k$。将这个分析与均匀混合假设结合起来,就得到关于各态的数目 $n_{k,\mathrm{S}}, n_{k,\mathrm{I}}, n_{k,\mathrm{R}}$ 的演化方程

$$
\begin{aligned}
n_{k,\mathrm{S}} &= -\sum_{k'} n_{k',\mathrm{I}}(t)\left(1-\frac{1}{k'}\right)P(k' \mid k)\,\frac{n_{k,\mathrm{S}}(t)}{N_k}, \\
n_{k,\mathrm{R}} &= n_{k,\mathrm{I}}(t)\left[\frac{1}{k}+\left(1-\frac{1}{k}\right)\sum_{k'} P(k' \mid k)\,\frac{n_{k',\mathrm{I}}(t)+n_{k',\mathrm{R}}(t)}{N_{k'}}\right],
\end{aligned}
\tag{8.35}
$$

这里 N_k 代表度为 k 的节点数,$n_{k,\mathrm{S}}(t), n_{k,\mathrm{I}}(t), n_{k,\mathrm{R}}(t)$ 分别表示 t 时刻度为 k 的点中 S 态、I 态和 R 态的节点数,而 $n_{k,\mathrm{S}}(t)/N_k$ 与 $(n_{k',\mathrm{I}}(t)+n_{k',\mathrm{R}}(t))/N_{k'}$ 则来自于均匀混合假设。$n_{k,\mathrm{I}}(t+1)$ 可从守恒条件 $N_k = n_{k,\mathrm{S}}(t)+n_{k,\mathrm{I}}(t)+n_{k,\mathrm{R}}(t)$ 中获得。

我们假定所研究的网络是无度关联的,即 $P(k' \mid k) = k'P(k')/\langle k \rangle$。我们关心“最终有机会听到消息”的人口密度。令 T 代表舆论传播结束时的时间,即

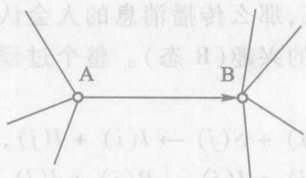


图8.1 (引自文献[35])

A将消息传给B,将A称为"父点",当B进行下一轮的传播时,就排除传给A(父点)的可能,所以在用平均场近似时,应该排除父点在邻居中所占的概率

$\sum_k n_{k,\mathrm{I}}(T)=0$。为得到方程(8.35)在时间 $t=T$ 的解,引入辅助变量 $s_k\equiv\int_0^T n_{k,\mathrm{I}}(t)\mathrm{d}t$。如果初始的感染种子(在 $t=0$ 时)具有度 k_0,我们有初始条件:对 $k\neq k_0$ 有 $n_{k,\mathrm{S}}=N_k,n_{k,\mathrm{I}}=0$ 及 $n_{k,\mathrm{R}}=0$,对 $k=k_0$ 有 $n_{k,\mathrm{S}}=N_k-1,n_{k,\mathrm{I}}=1$ 及 $n_{k,\mathrm{R}}=0$。于是方程(8.35)的解为

$$\begin{aligned}n_{k,\mathrm{S}}(T)&=N_k\exp\left[\frac{-k}{<k>N}\sum_{k'}s_{k'}\left(1-\frac{1}{k'}\right)\right],\\n_{k,\mathrm{R}}(T)&=N_k\left\{1-\exp\left[\frac{-k}{<k>N}\sum_{k'}s_{k'}\left(1-\frac{1}{k'}\right)\right]\right\},\\n_{k,\mathrm{I}}(T)&=N_k-n_{k,\mathrm{S}}(T)-n_{k,\mathrm{R}}(T)=0.\end{aligned}\tag{8.36}$$

由不同 k 的 $n_{k,\mathrm{I}}(T)=0$,我们得到一套关于 s_k 的超越方程,可精确的数值求解。于是可得终态时度为 k 的节点处于R态的人口密度

$$\rho(k)\equiv\frac{n_{k,\mathrm{R}}(T)}{N_k}=1-\mathrm{e}^{-\alpha k},\tag{8.37}$$

其中 $\alpha=\frac{1}{<k>N}\sum_{k'}s_{k'}\left(1-\frac{1}{k'}\right)$ 依赖于网络结构。显然,$\rho(k)$ 将随 k 单调增加,并对大的 k 趋于1。传播过程中总感染的节点数为

$$N_{\mathrm{R}}(T)\equiv\sum_k n_{k,\mathrm{R}}(T)=N-\sum_k N_k\mathrm{e}^{-\alpha k}.\tag{8.38}$$

总感染的密度为

$$\rho_{\mathrm{R}}\equiv\frac{N_{\mathrm{R}}}{N}=1-\sum P(k)\mathrm{e}^{-\alpha k}=\sum P(k)\rho(k),\tag{8.39}$$

依赖于度分布 $P(k)$。

我们用7.6节介绍的,部分优选、部分随机选择模型作为传播载体来进行数值模拟,以证实上述理论预言。首先考虑无标度网络情形,并让 $N=1000,m=5$ 及 $p=0$。在 $t=0$ 时我们随机选择一个种子来开始传播过程。在每一个时间步,每一个感染节点与它的一个邻居接触。如果这个节点为S态,它将变为I态;否

则,原先的感染节点自身将失去对消息的兴趣并变为 R 态。整个过程将继续下去直到时间 T 时没有任何 I 态节点为止。我们数出度为 k 的 R 态节点数 $n_{k,R}(T)$ 及度为 k 的总节点数 N_k,然后通过 $\rho(k)=n_{k,R}(T)/N_k$ 计算度为 k 的感染节点密度。我们发现当 $k<35$ 时 $\rho(k)$ 随 k 单调增加,而当 $k\geqslant35$ 时 $\rho(k)$ 保持在 $\rho(k)=1$ 或附近。图 8.2(a)中的"圆圈"显示其结果。为了比较,我们通过方程(8.37)来计算其理论结果。指数 α 可用其表达式计算 $t=T$ 时所有 s_k 获得,然后将 α 代入(8.37)就可获得 $\rho(k)$。图 8.2(a)中的"方块"给出了 $\rho(k)$ 随 k 的变化关系。将图 8.2(a)中的"圆圈"与"方块"相比,很容易看出理论结果与数值模拟符合的很好。对使用 $p=1$ 的随机网做传播载体的情况,我们发现了类似的结果,如图 8.2(b)所示。同样地,这里"圆圈"代表数值模拟而"方块"代表理论结果。

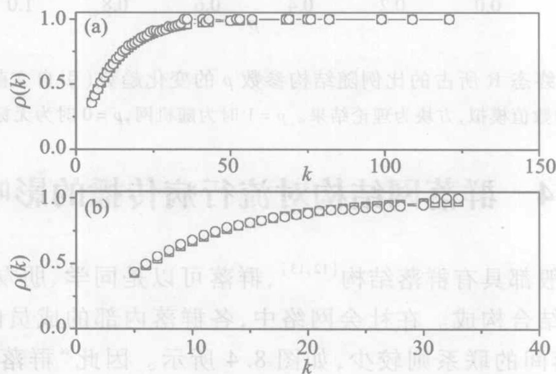


图 8.2 $\rho(k)\equiv n_{k,R}(T)/N_k=1-e^{-\alpha k}$ 与度 k 的关系(引自文献[35])
"圆圈"显示数值模拟,"方块"显示理论结果(注意两种符号几乎重叠)。
(a)为无标度网络 $p=0$ 的情形,(b)为随机网络 $p=1$ 的情形。此结果为
1000 次循环的平均,网络大小为 1000 个节点

然后我们研究 ρ_R 随结构参数 p 的变化。在数值实验中,我们用 7.6 节介绍的部分优选、部分随机选择模型,用不同的 p 产生不同的网络结构,并随机选取不同的种子。当舆论传播过程结束时,我们数出所有的 k 中最终感染的总数目 $N_R(T)$,再通过 $\rho_R=N_R(T)/N$ 来计算密度 ρ_R。图 8.3 中的"圆圈"显示了其结果。为方便比较,我们通过方程(8.39)计算了理论结果,如图 8.3 中的"方块"所示。很显然,图 8.3 中的"圆圈"与"方块"符合的相当好。此外,从图 8.3 还可容易看出 ρ_R 随结构参数 p 单调增加。这点可解释如下:对于相同平均度的网络,无标度网比随机网具有更多度大的节点,因此无标度网中的消息可较容易的传递到大节点然后再到其他节点。一旦大节点处于 I 态或 R 态,其他节点因为以较大概率连到它们,从而就更容易变成 R 态;而随机网却没有这个特点。因

此,舆论在无标度网上的传播要比在随机网上结束得快,从而导致无标度网的 ρ_R 比随机网的小。

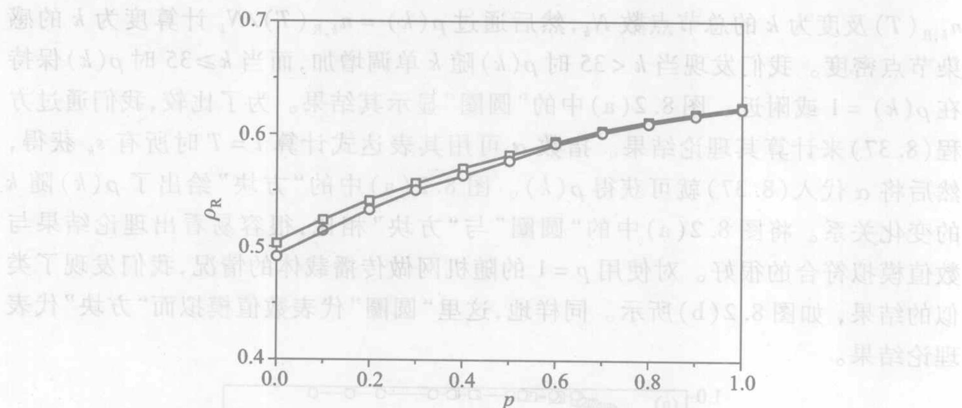


图 8.3 终态 R 所占的比例随结构参数 p 的变化趋势(引自文献[35])
圆圈为数值模拟,方块为理论结果。$p=1$ 时为随机网,$p=0$ 时为无标度网

8.4 群落网结构对流行病传播的影响

社会网络一般都具有群落结构[12,13],群落可以是同学、朋友、同事或俱乐部成员等同一类人结合构成。在社会网络中,各群落内部的成员间具有较密集的联系,而不同群落间的联系则较少,如图 8.4 所示。因此"群落网"与前面讨论的一般网络具有完全不同的结构。已经提出了数种不同的方法来构造群落网[12,13,36-40]。这种群落结构必定对流行病的传播有极大的影响。本节将根据文献[13]来讨论群落结构对流行病传播的影响。

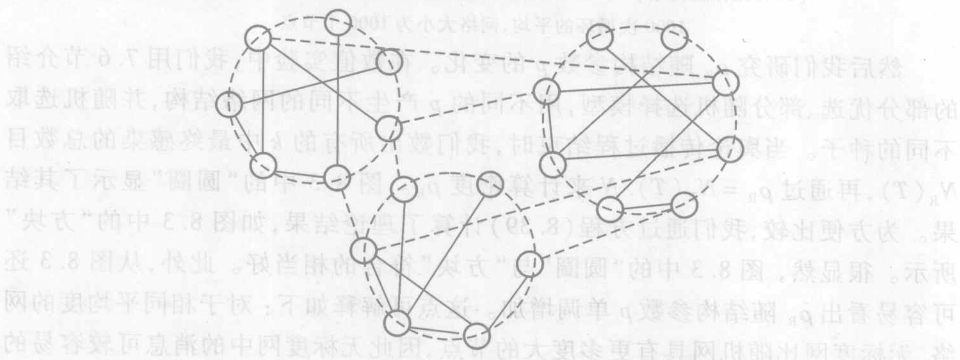


图 8.4 群落网的示意图(引自文献[13])
大圈代表群落,小圈代表节点,实线代表群落内连接,虚线代表群落间的连接

8.4.1 静态群落网模型

考虑到社会网具有高的集聚系数，群落内有高的连线密度，而群落间只有较少的连线，群落网可按如下方式构造[13]：

1. 在群落网模型中，N_0 个节点被随机地分成 m 个组，每个小组里有 $n_i(i=1,2,\cdots,m)$ 个节点，所以 $N_0=\sum_{i=1}^{m}n_i$。

2. 在组 i 内节点间以概率 p 连线，所以组 i 内共有$\frac{1}{2}n_i(n_i-1)p$ 条连线。

3. 在组 i 与组 j 之间，节点间以概率 q 连线，所以这两个组之间有 n_in_jq 条连线。

如果总边数为 N，则 $N=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2}n_i(n_i-1)p+\sum_{i<j}^{m}n_in_jq$，令 $\sigma=\frac{p}{q}$，则在群落网中有 $\sigma>>1$。如果 $\sigma=1$，那么网络就退化到一般的随机网。因此 σ 代表群落化的程度，为社会网的序参量。

网络的结构变量为：

$$p=\frac{N\sigma}{\sigma\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2}n_i(n_i-1)+\sum_{i<j}^{m}n_in_j},$$
$$q=\frac{N}{\sigma\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2}n_i(n_i-1)+\sum_{i<j}^{m}n_in_j},\tag{8.40}$$

对给定的 N_0 与 N，σ 决定一套给定的 n_i 的群落网结构。

我们用 SIS 模型来讨论流行病在群落网上的传播。假定易感人群以概率 λ 与每个周围的感染个体接触。如果节点 i 为易感态且有 k_i 个邻居，它们中有 k_{inf} 处于感染态，则在每一个时间步，节点 i 将以概率$[1-(1-\lambda)^{k_{\text{inf}}}]$变为感染态。同时，每个感染节点以概率 u 变为易感态。为简单起见，我们这里仍然令 $u=1$，因为这样做只是改变病毒传播的时间尺度[7]。

假定初始时有一粒种子，则它的每个邻居将有 λ 的概率被感染，然后再感染它们的邻居。一定的时间后，感染达到定态。对 $\lambda<\lambda_c$，定态为零；而对 $\lambda>\lambda_c$，定态为非零。由于群落网的非均匀结构，最终的状态依赖于选取的种子及网络构型，因此有意义的结果必须为对各种网络构型及各种初始条件的平均。这个平均事实上为统计平均，可用概率方法得到。从概率论[41]我们得到 $\lambda_c=1/<k_i>$。

对具有 $\sigma>>1$ 的群落网，当 λ 较小时，传播会限制在种子的群落内。在统计的意义上，可以认为种子被均匀选取在每个群落。对每个特定的群落 i，其阈

值 λ_c^i 由其平均连线决定。当群落间的连线远小于群落内的连线时,我们有 $\lambda_c^i \approx 1/<k_i> \approx 1/p(n_i-1) \sim 1/p$,且此关系对所有的种子成立。整个系统的 λ_c 为不同构型及不同实现的平均,即对不同的种子平均,因此 λ_c 与 p 间的定量关系为 $\lambda_c \sim 1/p$。将 p 的表达式(8.40)代入 λ_c 我们得

$$\lambda_c \sim \frac{1}{N}\left(1+\frac{a}{\sigma}\right), \tag{8.41}$$

其中 a 为一常数。因此 λ_c 与 N 成反比。对给定的 N,方程(8.41)可被写为

$$\lambda_c(\sigma)-\lambda_c(\infty) \sim \frac{1}{\sigma}, \tag{8.42}$$

这就是 λ_c 对群落程度 $\sigma >> 1$ 的依赖关系。

为检验上述理论分析,我们进行数值实验。取 $N_0=1000, N=4\times10^4, m=10$ 及 100 个具有不同随机数 $m_1(i)\ (i=1,2,\cdots,m)$ 的网络构型。对每一个构型,我们取 100 个不同的初始值,每个初值只有一个随机选取的感染节点。因此我们有 10^4 个实现。

我们发现,当 $\lambda < \lambda_c$ 时,病毒传播经过一定时间就自动消亡,不会大规模爆发;当 $\lambda \geqslant \lambda_c$ 时,病毒可以持续传播,如图 8.5 所示,其中 $n(t)$ 为 t 时刻感染的人数。图 8.5 中各个峰值表明病毒在不同群落的渗透过程。

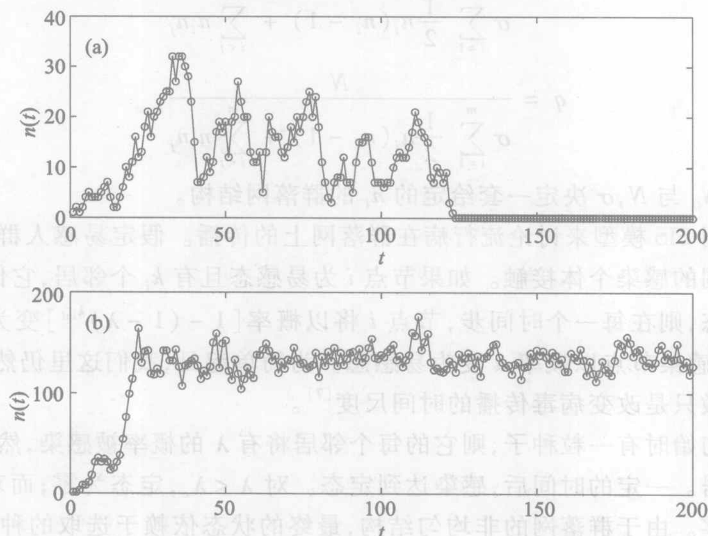


图 8.5　$N_0=1000, N=40000, m=10, \sigma=100$ 的群落网中,感染节点数 $n(t)$ 与时间 t 的关系(引自文献[13])

由图看出:(a)当 $\lambda=0.008<\lambda_c$ 时,病毒传播一定时间就自动消亡,不会大规模爆发;(b)当 $\lambda=0.015\geqslant\lambda_c$ 时,病毒可以持续传播

为检验方程(8.41)与(8.42),图8.6给出了数值模拟结果,其中(a)代表对给定的σ,λ_c对N的依赖性;(b)对$\sigma >> 1$时给定的σ,λ_c对σ的依赖性。图8.6(a)中两条线的斜率均为1,证实了(8.41)中λ_c随N的关系;在图8.6(b)中,虚线显示当$\sigma > 200$时"圆圈"可以用斜率为1的直线逼近,证实了方程(8.42)。

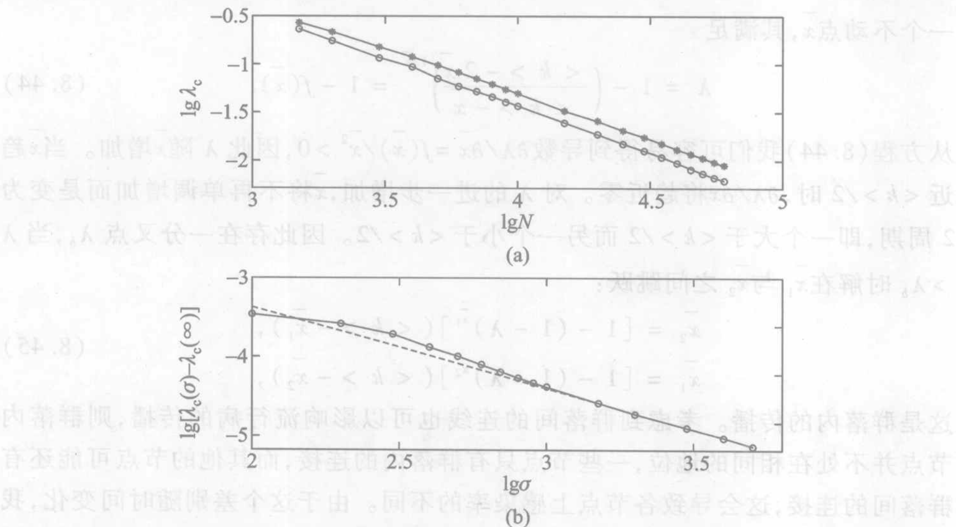


图8.6 $N_0 = 1000, N = 40000, m = 10, \sigma = 100$的群落网中,40 000次模拟以后的平均(引自文献[13])

"圆圈"和"三角形"分别代表$\sigma = 100$和$\sigma = 1$。(a)传播阈值λ_c与N的关系,(b)λ_c与σ的关系

这些结果表明,随着群落度的降低,流行病的传播阈值将增加并在随机网时达到极大值。也就是说,流行病在随机网上比群落网上更不容易爆发。

8.4.2 群落网模型的一个应用

现在我们用上面的群落网络模型来分析发生在泰国的流行病传播的实际斑图[42]。登革热是一种蚊子传播疾病,每年可感染5千万到1亿的人。据报道每年在泰国的72个省发生季节性的登革热病,其感染形式为周期性的波或斑图[5,43]。这个周期波从泰国最大的城市曼谷发出,以每月148 km的速度径向地向外省传播出去。这些以年轮为周期的波,可保持离曼谷510 km的相干。其后果是传染斑图显示了强的季节性,即年代与年内的周期振荡。

我们用SIS模型来研究其定态行为。考虑到同一群落内各节点的连线比较均匀且易感人群与感染人群的充分混合,群落内感染节点的演化可由一个节点被感染邻居数k_{inf}的变化来反映。用$x(n)$表示k_{inf},则$x(n)$的变化将反映定态的

变化。从感染率$[1-(1-\lambda)^{x(n)}]$我们知道,大的$x(n)$将导致易感人群有大的感染概率。另一方面,$x(n)$的增加会导致易感人群的减少,因此演化方程可写为

$$x(n+1)=[1-(1-\lambda)^{x(n)}][<k>-x(n)], \tag{8.43}$$

这里$\lambda_c<\lambda<1$且$<k>-x(n)$为时间n时邻居中的易感人数。此分立方程有一个不动点$\bar{x}$,其满足

$$\lambda=1-\left(\frac{<k>-2\bar{x}}{<k>-\bar{x}}\right)^{1/\bar{x}}=1-f(\bar{x}). \tag{8.44}$$

从方程(8.44)我们可容易得到导数$\partial\lambda/\partial\bar{x}=f(\bar{x})/\bar{x}^2>0$,因此$\lambda$随$\bar{x}$增加。当$\bar{x}$趋近$<k>/2$时,$\partial\lambda/\partial\bar{x}$将趋近零。对$\lambda$的进一步增加,$\bar{x}$将不再单调增加而是变为2周期,即一个大于$<k>/2$而另一个小于$<k>/2$。因此存在一分叉点$\lambda_b$,当$\lambda>\lambda_b$时解在$\bar{x}_1$与$\bar{x}_2$之间跳跃:

$$\begin{aligned}\bar{x}_2&=[1-(1-\lambda)^{\bar{x}_1}](<k>-\bar{x}_1),\\ \bar{x}_1&=[1-(1-\lambda)^{\bar{x}_2}](<k>-\bar{x}_2),\end{aligned} \tag{8.45}$$

这是群落内的传播。考虑到群落间的连线也可以影响流行病的传播,则群落内节点并不处在相同的地位,一些节点只有群落内的连接,而其他的节点可能还有群落间的连接,这会导致各节点上感染率的不同。由于这个差别随时间变化,我们可将它处理为涨落。由于λ越大,来自其他群落的影响也越大,因此方程(8.43)可修改为

$$x(n+1)=[1-(1-\lambda)^{x(n)}][<k>-x(n)]+D\lambda\zeta(n), \tag{8.46}$$

这里$\zeta(n)$为$[0,1]$间均匀分布的噪声,D为噪声强度。图8.7显示了方程(8.46)的定态解,显然它在$0.015<\lambda<0.23$时为周期1,在$\lambda>0.23$时为2周期,且当λ趋近0.23时1周期趋近$\bar{x}(n)=<k>/2=30$。

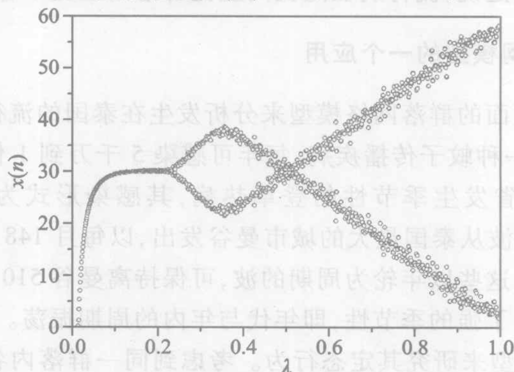


图8.7 方程(8.46)显示的定态时感染人数随感染率的变化(引自文献[42])

其中$<k>=60, D=0.2$

现在我们用 SIRS 模型[42]重新考虑这个传播过程。我们的数值模拟表明，如果选择合适的参数 T_I 与 T_R，也可以在 SIRS 模型中观察到周期波。与 SIS 模型不同之处在于，在 SIRS 模型中存在两个阈值 λ_{c1} 与 λ_{c2}。周期波只存在于范围 $\lambda_{c1} < \lambda < \lambda_{c2}$，并在这个范围外消失。关于 λ_{c1} 的原因与 SIS 模型相同；而关于 λ_{c2} 的原因是由于存在间隔 T_I 使得更多易感人群被感染，从而有可能使所有的人在间隔 T_R 内变为 R 态。一旦这个情形发生，传播过程终止。图 8.8 给出了 λ 在范围[λ_{c1}，λ_{c2}]内时周期波的典型图案，其中(a)描述感染位置随时间的变化，(b)描述感染数目随时间的变化。与 SIS 模型得到的结果结合，可知群落网的流行病传播可用来解释登革热传播的时空斑图。

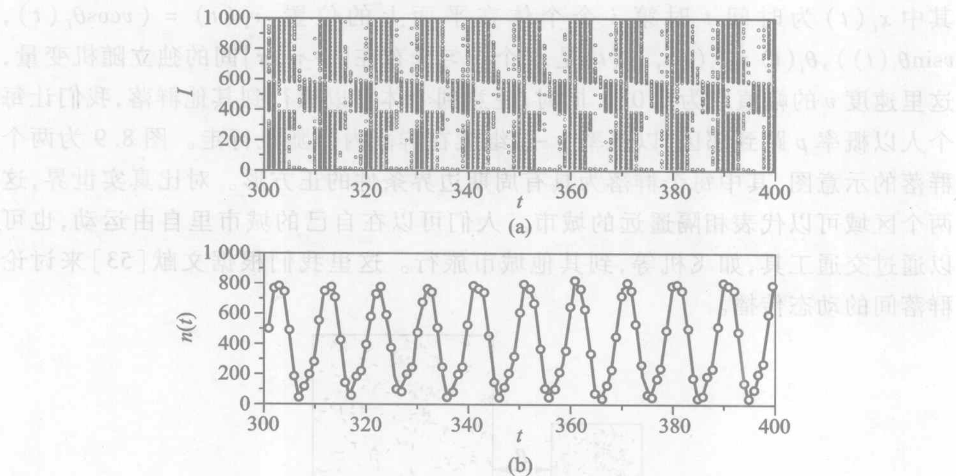


图 8.8 感染在 SIRS 模型中的演化（引自文献[42]）

其中 $N_0 = 1000$，$N = 4 \times 10^4$，$m = 10$ 与 $\sigma = 100$，(a) 代表感染位置随时间 t 的变化其中纵坐标 I 代表节点 i 的状态，图中数据点代表节点的状态为感染态，空白则代表非感染态（R 或 S），(b) $T_I = 4$，$T_R = 4$ 与 $\lambda = 0.12$ 时最终的感染人数 $n(t)$ 随时间 t 的演化

8.5 动态群落网上的流行病传播

通过上面的讨论，我们可以得出这样一个结论，即传染病本身的动力学性质和个体所在的网络结构共同决定了疾病的传染行为和传染过程。对于某种特定的疾病而言，网络结构对其传播的影响是非常大的。我们研究传染病传播不仅仅是要掌握其传播的机制，更要掌握疾病的预防和控制策略。免疫保护就是通过某种规则把网络中的某些节点保护起来，也就是我们常说的隔离保护[44-47]。最容易想到的控制病毒泛滥的方法就是将群落与周围感染源隔离[44,47]。然而，

实际的情况非常复杂。一方面,个体感染与发现之间存在延迟,周围的人很难及时发现感染个体;另一方面,个体感染有时候并不一定需要直接接触,可以通过第三者间接传播。加之在现实生活中,为了维持群落的正常运转,也不能切断与外界的所有联系,即与“安全”群落间的联系应该保留。那么这里就有一个重要问题:保持与邻区接触的风险有多大?

注意到个体可以在群落内自由移动且其接触的邻居随时间改变[48-52],我们可以构建一个更接近于现实生活的动态网络。假设每个人只与以自己为圆心,半径为 r 内的人接触,而且每个人在自己的群落里按如下方式移动:

$$x_i(t+\Delta t)=x_i(t)+v_i(t)\Delta t, \tag{8.47}$$

其中 $x_i(t)$ 为时间 t 时第 i 个个体在平面上的位置,$v_i(t)=(v\cos\theta_i(t), v\sin\theta_i(t))$,$\theta_i(t)=\xi_i(t)$, $\xi_i(t)$ 是 N 个均匀分布在 $[-\pi,\pi]$ 间的独立随机变量,这里速度 v 的幅值取为 0.03。同时,注意到个体可以旅行到其他群落,我们让每个人以概率 p 跳到邻区,以概率 $1-p$ 继续在群落内作随机行走。图 8.9 为两个群落的示意图,其中每个群落为具有周期边界条件的正方形。对比真实世界,这两个区域可以代表相隔遥远的城市。人们可以在自己的城市里自由运动,也可以通过交通工具,如飞机等,到其他城市旅行。这里我们根据文献[53]来讨论群落间的动态传播。

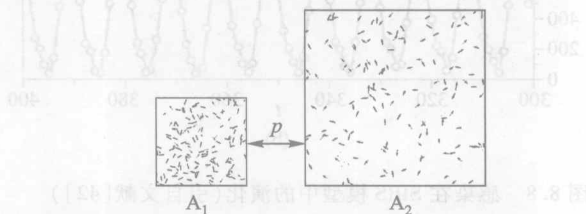


图 8.9 动态的群落网,节点在两个区域之间通过概率 p 进行跳跃(引自文献[53])

采用 SIS 模型来进行讨论。令 A_1 的边长为 L_1,A_2 的边长为 L_2,则区域 A_1 的阈值为 $\lambda_{c1}\sim L_1^2/(\pi r^2 N)$, 区域 A_2 的阈值为 $\lambda_{c2}\sim L_2^2/(\pi r^2 N)$。假设两个正方形的群落内各有 $N=1000$ 个节点,若无特别说明则 $r=0.05$, $L_1=0.5$, $L_2=1$。因此 $\lambda_{c1}=0.034<\lambda_{c2}=0.125$。由于群落 A_1 的边长是群落 A_2 的一半,所以群落 A_1 的人口密度是群落 A_2 的 4 倍,或者说,群落 A_1 节点的平均度为群落 A_2 的 4 倍。现在考虑 λ 在 λ_{c1} 与 λ_{c2} 之间的情形。为方便起见,我们将 $\lambda>\lambda_c$ 的情形叫做感染群落,将 $\lambda<\lambda_c$ 的情形叫做安全群落。

下面我们来看将两个群落连在一起时,即 $p>0$ 时的情形。当两个群落连通时,我们所关心的问题是病毒传播概率为 $\lambda_{c1}<\lambda<\lambda_{c2}$ 时,群落 A_2 会不会受到群落 A_1 的影响,使其在低于自身传播阈值的情况下被感染。我们分别用 I_1,I_2 表

示 A_1,A_2 中受感染的人数。因 A_1,A_2 内的节点以概率 p 互相跳跃,则在 $t+1$ 步之前,有迭代方程:

$$\begin{aligned} I_1'(t) &= I_1(t)(1-p) + I_2(t)p, \\ I_2'(t) &= I_2(t)(1-p) + I_1(t)p. \end{aligned} \tag{8.48}$$

因此,在 $t+1$ 步时,受感染的点数为

$$\begin{aligned} I_1(t+1) &= (N - I_1'(t))(1-(1-\lambda)^{<k>_1 I_1'(t)/N}), \\ I_2(t+1) &= (N - I_2'(t))(1-(1-\lambda)^{<k>_2 I_2'(t)/N}), \end{aligned} \tag{8.49}$$

这里的 $<k>_1$,$<k>_2$ 表示 A_1,A_2 中的平均度。以上两个方程组均是在平均场理论的近似下建立的。当 $\lambda_{c1} < \lambda < \lambda_{c2}$ 时,经过迭代,方程(8.49)会达到一个不动点。当然,这个不动点取决于 p 值的大小。令 $I_2^*(t+1) = I_2^*(t)$,我们得到

$$I_2^* = (N - I_1^* p - I_2^*(1-p))(1-(1-\lambda)^{<k>_2(I_2^*(1-p)+I_1^* p)/N}). \tag{8.50}$$

当 p 很小的时候,$I_2^*/N \ll 1$。将(8.50)式的第一部分近似为 N 并将第二部分展开至一级项可得

$$I_2^* = \frac{\lambda <k>_2 I_1^* p}{1 - \lambda <k>_2(1-p)} \tag{8.51}$$

显然,I_2^* 是随 p 单调增加的,这个结论已很好的得到了数值模拟验证。在数值模拟中,我们通过检验 $I_1(t)$ 与 $I_2(t)$ 的演化并将它们的稳定值作为 I_1^* 与 I_2^*,然后对多次实现做平均。图 8.10 为 $\lambda=0.1$ 时,I_1^*,I_2^* 随 p 的变化情形,"空心点"为方程(8.49)的迭代解,"实心点"是数值模拟结果。可以看出,数值模拟和理论解析吻合得很好。

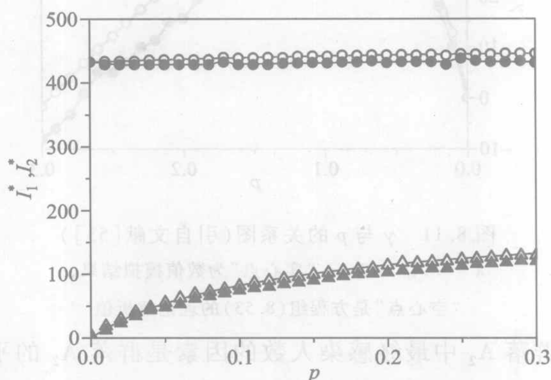


图 8.10 I_1^*,I_2^* 的稳定解随跳跃概率 p 的变化趋势(引自文献[53])

"实心点"是数值模拟的结果,"空心点"是方程(8.49)的解析结果。"圆圈"代表 I_1^*,"三角形"代表 I_2^*。所有数值模拟结果均经过100次平均

为什么个体跳跃可以使安全区 A_2 有持续的感染态?为明白其机制,我们来

详细分析跳跃个体的作用。没有跳跃个体时，A_2 中的初始种子在经历暂态后就会自动消亡。当有跳跃个体时，A_2 中暂态后的感染群体 $I_2(t+1)$ 部分来自于跳跃部分 $I_1(t)p$，部分来自于保留部分 $I_2(t)(1-p)$，当然这个保留部分也是由前面的跳跃部分决定的，即稳定后的 I_2^* 完全由前面若干步的跳跃决定。因此有必要引入参数 γ 来描述 A_2 中跳跃个体对再生感染群体的效率。注意到图 8.10 中 I_2^* 的斜率随 $I_1(t)p$ 降低，表明 $I_1(t)p$ 并不随 $I_1(t)p$ 线性增加。这一点也可以直接从方程(8.51)求斜率得出

$$\frac{\mathrm{d}I_2^*}{\mathrm{d}p} = \frac{\lambda < k >_2 I_1^*}{1-\lambda < k >_2 (1-p)}\left(1-\frac{I_2^*}{I_1^*}\right). \tag{8.52}$$

显然，(8.52)式随 p 的增加而减少，因此 γ 的效率依赖于 p，可以用下列公式给出：

$$\gamma = I_2^* - pI_1^*, \tag{8.53}$$

它反应了跳跃节点的再生能力，其行为如图 8.11 所示。从图 8.11 可见，当 $p<p_0$ 时，γ 随 p 的增大而增大；当 $p>p_0$ 时，γ 随 p 的增大而减小。即 p 有一个最优值，这里当 $\lambda=0.1$ 时，$p_0\approx 0.1$。$p>p_0$ 时 γ 的减少是因为大的 p 导致更多的感染群体 I_2 与更少的易感群体 $N-I_2$，因此感染群体缺少充分的可感染邻居，从而导致再生率的减少。

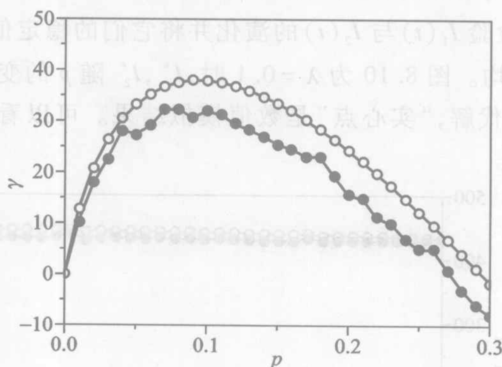


图 8.11　γ 与 p 的关系图(引自文献[53])
$\lambda=0.1, p_0\approx 0.1$。“实心点”为数值模拟结果，
“空心点”是方程组(8.53)的理论解析值

另一个影响群落 A_2 中最终感染人数的因素是群落 A_2 的平均度 $<k>_2$，而 $<k>_2$ 是由节点密度和作用半径决定的。对于给定的节点总数 N，节点半径又可以由 L_2 决定的。从方程(8.51)，我们可以得到

$$\frac{I_1^*}{I_2^*} = \frac{1}{\lambda < k >_2 p} - \frac{1-p}{p} = \frac{L_2^2}{\lambda \pi r^2 Np} - \frac{1-p}{p}. \tag{8.54}$$

从(8.54)很容易看出，对固定的 p，I_1^*/I_2^* 与安全群落的平均度 $<k>_2$ 成反比，

即正比于 L_2^2 且反比于 r^2。对于固定的 $\lambda=0.1$ 且要求 $\lambda_{c1}<\lambda<\lambda_{c2}$ 时，可让 $r=0.05$ 时的 L_2 从 1 增加到 2.4，或让 $L_2=1$ 时的 r 从 0.03 变到 0.055。数值模拟完全证实了(8.54)的理论预言，图 8.12 给出了 $p=0.025$，0.05 与 0.1 三种典型的情形，其中(a)显示 I_1^*/I_2^* 与 L_2^2 之间的关系，(b)为 I_1^*/I_2^* 与 $1/r^2$ 之间的关系。

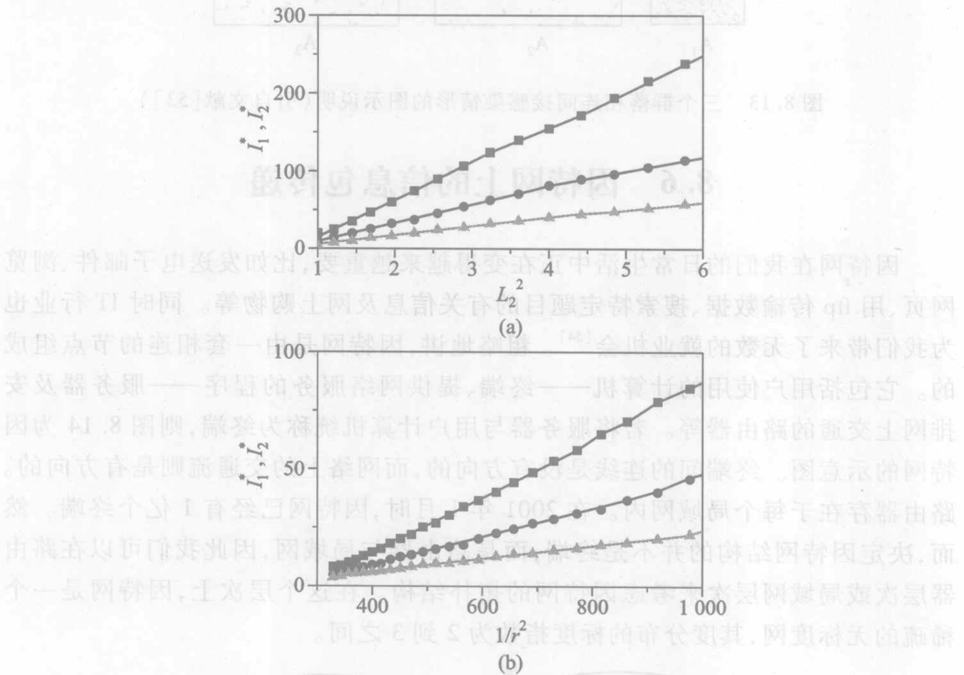


图 8.12 参数 L_2 和 r 与 I_1^*/I_2^* 比例的关系(引自文献[53])

$L_1=0.5$，$\lambda=0.1$，“方块”，“圆圈”和“三角形”分别代表 $p=0.025$，0.05 和 0.1 的情形。(a) 为 $r=0.05$ 时 I_1^*/I_2^* 和 L_2^2 的关系图，(b)为 $L_2=1$ 时 I_1^*/I_2^* 与 $1/r^2$ 的关系图

在明白了两个群落上流行病传播机制后，现在我们再来看一下三个群落的情形，即通过间接接触的流行病传播方式。这种情形经常出现在实际中，比如当某一群落内爆发流行病时，它周围的群落为了自身的安全通常会采取隔离措施。但对那些不直接与它相连的群落来说，它们不会采取任何隔离措施。假定一个相邻群落没有及时切断与感染区的联系，那么与感染区间接相连的第三个群落还安全吗？为了解决这个问题，我们可构造图 8.13 的模型进行研究，其中 A_1 代表高密度的感染群落，A_2 与 A_3 代表低密度的安全群落，跳跃允许发生在 A_1 与 A_2 及 A_2 与 A_3 之间但禁止在 A_1 与 A_3 之间发生。作与两个群落情形类似的讨论，我们发现第三个安全群落也可以通过间接感染而维持持续的感染，具体讨论

见文献[53]。

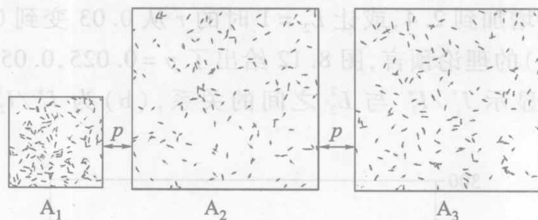


图 8.13　三个群落相连间接感染情形的图示说明(引自文献[53])

8.6　因特网上的信息包传递

因特网在我们的日常生活中正在变得越来越重要,比如发送电子邮件、浏览网页、用 ftp 传输数据、搜索特定题目的有关信息及网上购物等。同时 IT 行业也为我们带来了无数的就业机会[54]。粗略地讲,因特网是由一套相连的节点组成的。它包括用户使用的计算机——终端、提供网络服务的程序——服务器及安排网上交通的路由器等。若将服务器与用户计算机统称为终端,则图 8.14 为因特网的示意图。终端间的连线是没有方向的,而网络上的交通流则是有方向的。路由器存在于每个局域网内。在 2001 年 1 月时,因特网已经有 1 亿个终端。然而,决定因特网结构的并不是终端,而是路由器与局域网,因此我们可以在路由器层次或局域网层次来考虑因特网的拓扑结构。在这个层次上,因特网是一个稀疏的无标度网,其度分布的标度指数为 2 到 3 之间。

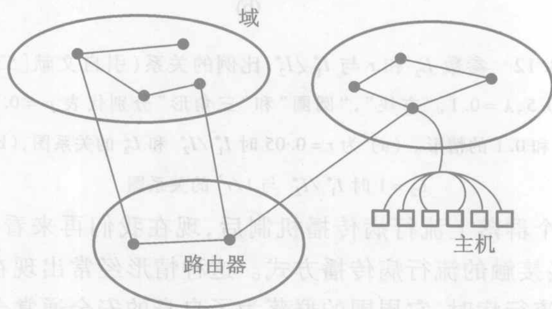


图 8.14　因特网的结构(引自文献[2])

然而,因特网并不是完备的,与公路上的交通堵塞类似,因特网经常发生间歇的堵塞[55]。这个现象也可以在其他的通讯网(如航空网与邮政网等)中观察到。通讯网中一个关键的问题是如何控制其间歇性堵塞,以便维持其正常而有效的功能。为了解决因特网上的此问题,我们需要明白因特网的工作机制,因此因特网上信息包传递的建模就成为一个非常重要的问题。从这个方面来说,提

出好的网络传输协议,找到源点与目的点之间信息包传递的最优策略,就是当前面临的基本任务之一。这个问题也是目前复杂网络领域中的热点之一,现已得到了初步的研究结果,这里作一简单总结。

因特网上信息包传递研究的雏形是计算机网络模型上的通讯,其信息处理器为路由器[56-68]。路由器的功能就是指导数据信息包到达目的地。在计算机网络中,节点既可以是终端,也可以是路由器。终端可产生带有目的地地址信息的信息包,同时也可接收来自其他终端的信息包。路由器则发现每个信息包的终端与目的地间的最短距离路线,并在每一步将信息包沿着这条线路向前传输一步。以前的研究主要集中在三个不同的计算机网络模型。第一个模型将边缘节点当作终端,内部节点当作路由器[61]。第二个模型将所有的节点都既当作终端又当作路由器[62,65,66]。图 8.15 为其示意图。第三个模型则处于这两个极端情形之间,即部分节点当作终端,剩下的当作路由器[63,67,68]。

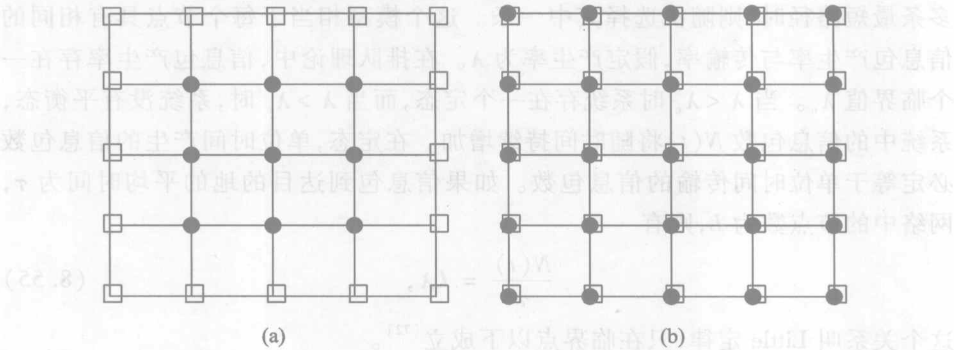


图 8.15 计算机网络模型

"方块"代表终端,"圆点"代表路由器

另外一种通讯模型则为层状结构,主要用来描述因特网上信息包流的去向。若将其投影为平面格子,则为如图 8.16 所示的 Cayley 树[64-66]。这里产生的信息包必须通过上级结构或连线才可以进行交换。

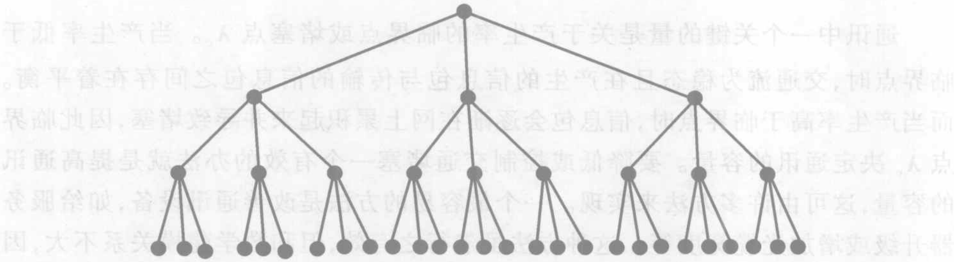


图 8.16 计算机树状(Cayley tree)通讯网络模型

然而,如前所述,现实中的大多数自然及人造网络均不是2D格子或Cayley树,而是无标度网络,如因特网、WWW网、电话网、蛋白质网、基因调控网及人类性接触网等。2D格子或Cayley树可近似当作均匀网,而无标度网则是非均匀网络,因此因特网上的信息包传递用基于2D格子或Cayley树的均匀网来讨论则是不合适的,必须考虑其小世界特点及节点度的大小的影响。

因特网上的数据传输模型通常基于局域网层次,并将所有的节点都被认为既是路由器,又是终端。数据包只能通过网上的连线从一个节点传向下一个节点,并最终传到目的地。由于无标度网络的平均度不大,当没发生交通堵塞时,传输过程通常比较迅速。

因特网上传输数据的标准协议如下[69-71]:在每一步,随机在网上产生若干个信息包,并给他们分别赋予源点及目的地地址。在随后的步骤里,每个拥有信息包的节点送出一个信息包并让它沿着最短路径朝目的地方向前进一步。当有多条最短路径时,则随机选择其中一条。这个模型相当于每个节点具有相同的信息包产生率与传输率,假定产生率为 λ。在排队理论中,信息包产生率存在一个临界值 λ_c。当 $\lambda<\lambda_c$ 时系统存在一个定态,而当 $\lambda>\lambda_c$ 时,系统没有平衡态,系统中的信息包数 $N(t)$ 将随时间持续增加。在定态,单位时间产生的信息包数必定等于单位时间传输的信息包数。如果信息包到达目的地的平均时间为 τ,网络中的节点数为 L,则有

$$\frac{N(t)}{\tau}=L\lambda, \tag{8.55}$$

这个关系叫 Little 定律,只在临界点以下成立[72]。

8.7 因特网上交通堵塞的控制

8.7.1 EGM 方法

通讯中一个关键的量是关于产生率的临界点或堵塞点 λ_c。当产生率低于临界点时,交通流为稳态且在产生的信息包与传输的信息包之间存在着平衡。而当产生率高于临界点时,信息包会逐渐在网上累积起来并导致堵塞,因此临界点 λ_c 决定通讯的容量。要降低或控制交通堵塞一个有效的办法就是提高通讯的容量,这可由许多方法来实现。一个最容易的方法是改善通讯设备,如给服务器升级或增加光缆宽度等。这种方法虽然行之有效,但和数学建模关系不大,因此这里不作详细探讨。我们感兴趣的是在现有设备下,如何通过网络协议或算法的改进来提升通讯的容量,从而达到降低或控制交通堵塞的目的。这方面的

一个初步尝试是由易赤尼克(Echenique)、嘎德斯(Gomez - Gardenes)及莫任那(Moreno)于2004年提出的,我们称之为EGM方法[73-75]。

由于路由器的功能是找到源点与目的地之间的最短路径,而这些最短距离通常容易经过那些度大的节点,因此网络上的信息包穿过度大的节点的概率就远大于穿过那些度小的节点。另一方面,由于每个节点具有相同的信息包传输率,这样就容易造成信息包在度大的节点上的大量积压,这个现象在无标度的因特网上表现得相当明显。积压的信息包需要排队并等待相当长的时间才能被送到下一个中继站,从而与走最短路径以便快速到达目的地的初衷相违背。有鉴于此,易赤尼克等提出了他们的EGM方法,其原理如下:将信息包分散到路程稍远但不太堵塞的路线上来节省传输时间,即以路程换时间。根据此原理,信息包的行走路线就需要既考虑短的路径又考虑所经过路程上的信息包积压少。如果将最短路径方法叫做静态算法,则EGM方法为动态算法。EGM方法的具体做法如下[73,74]:假定节点 l 上有一个信息包需要被送到节点 j,则对节点 l 的每一个邻居 i 定义一个到目的地 j 的有效距离:

$$d_{\text{eff}}^{i} = hd_i + (1-h)c_i, \tag{8.56}$$

其中 d_i 为从 i 到 j 的最短距离,c_i 为 i 上积压的信息包数,h 为0到1之间的一个常数。很显然,当 $h=0$ 时,d_{eff}^{i} 就是最短距离 d_i。然后比较 l 的各个邻居上 d_{eff}^{i} 的大小,选择最小 d_{eff}^{i} 的那个节点作为信息包的下一个中继站。按照此步骤对 $i \to j$ 路线上的其他中继站的选取作相同的处理。很显然,此方法的效果依赖于参数 h 的值。易赤尼克等指出,对无标度网,$h=0.8$ 时效果最优。

最近,汪秉宏等提出了类似的想法,考虑了节点度的加权效应对网络传输的影响[76,77]。

8.7.2 经济方法

在局域网层次,每个节点代表不同的公司、部门及学校等。它们除了具有不同的对外联系渠道——度的大小外,还具有不同数目的员工及财力等,因此假定每个节点具有相同的信息包产生率与传输率是过于简化了。有鉴于此,来颖诚等考虑了信息包产生率对每个节点相同而传输率依赖于节点度的情形[78],刘宗华等则考虑了信息包产生率与传输率都依赖于节点度的情形[79,80]。我们这里介绍刘宗华等的模型。此模型认为产生率与传输率都与节点的度成正比。假定节点 i 的度为 k_i,取产生率为 λk_i,传输率为 $1+\beta k_i$,这里 λ,β 为常数,$1+\beta k_i$ 中的1来自于每个节点每一步应能传送至少一个信息包。具体算法如下:

1. 在每一步,节点 i 以概率 λk_i 产生信息包,并给信息包随机选取一个目的地。如果节点 i 已有积压的信息包,则新产生的信息包排在最后。

2. 对于已产生的信息包,路由器将为其找到一条最短路径走向目的地。如

果同时存在若干条最短路径,则选择那条排队较短的。

3. 在每一步,节点 i 以先进先出的原则送出 $1+\beta k_i$ 个信息包到它们的下一个中继站。如果 $1+\beta k_i$ 为非整数时,则小数部分以概率实现。

4. 到达中继站的信息包排在队列的尾部。如果中继站就是目的地时,则将信息包从系统中删除。

这些步骤在每个节点上同时进行操作。

为简单起见,每个信息包只包含两个信息:产生的时间与目的地地址。定量地,每一步产生的总信息包数为 $\sum_{i=1}^{N}\lambda k_i = 2m\lambda N$,这里 $2m$ 为节点的平均度,N 为节点的数目或网络大小。同时,最多有 $\sum_{i=1}^{N} 1+\beta k_i = (1+2m\beta)N$ 个信息包被向前移动一步;当有的节点上没有足够的 $1+\beta k_i$ 个信息包时,则传输的总信息包数小于 $(1+2m\beta)N$。当每步新产生的信息包数等于到达目的地的信息包数时,网络运行在 Little 定律工作的范围内。由于无标度网上存在少量大节点,因此大节点就极容易导致堵塞。我们将这种每个节点具有相同 β 的情形叫正常途径。

克服堵塞的一个容易想到的办法是提升网络容量,即增加 β。由于因特网非常巨大,且没有一个中心组织者来管理整个网络,因此增大每个节点的 β 就变得不现实。考虑到大的节点代表大的公司或机构,它们有较强的财力支撑,所以提升它们的 β 则是可能的。我们将这种只提升大节点的 β 的方法叫经济或有效方法,文献[79]指出经济方法可以以较少的花费代价换取较大的容量提升。具体做法如下:选取百分比为 f 的大节点来增加其容量使 $\beta>0$,而让其他的节点待在 $\beta=0$ 的状态,因此每步向前输送的总节点数为 $(N+\sum_{i\in f}\beta k_i)$。图 8.17 给出了 BA 模型中度为 k 的节点上的平均信息包数 $\langle n(k)\rangle$ 在时间 $t=500$ 时随 k 的分布,其中参数为 $\lambda=0.01$,$m=3$,$f=3\%$ 及网络大小 $N=1000$,平均来自于对 100 个不同实现的平均,“星号”代表正常途径的结果,“圆圈”代表经济方法的结果,(a)为 $\beta=0.05$ 的情形,(b)为 $\beta=0.1$ 的情形。很显然,(a)为交通堵塞的情形,(b)为交通畅通的情形。分别比较(a)与(b)中的“星号”与“圆圈”,很容易发现“圆圈”为沿着“星号”的涨落。因此只调节 $f=3\%$ 的大节点的容量的经济方法与调节所有节点的容量的正常途径具有相同的效果!

8.7.3 改进方法

考虑所有节点的信息包产生率与传输率都依赖于节点的度后,EGM 方法就需要进行改进。方程(8.56)应修改为

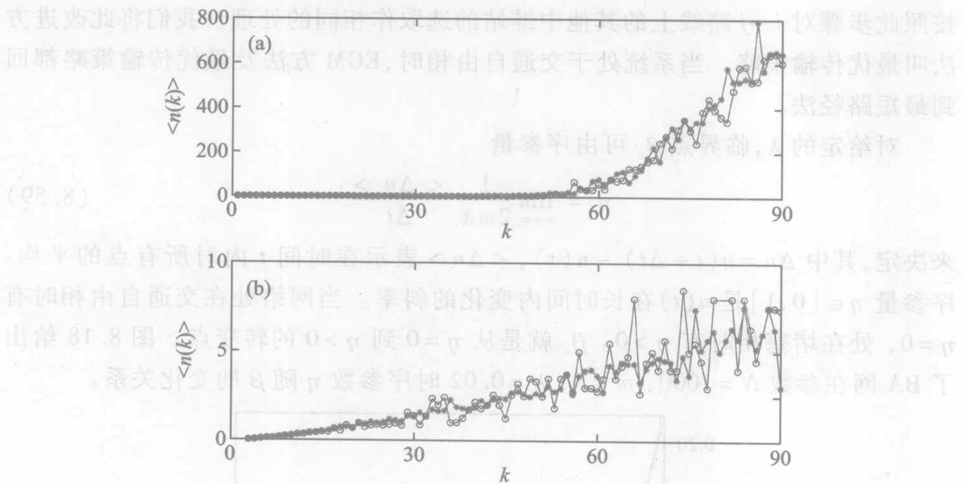


图 8.17 BA 网中的信息包数在时间 $t=500$ 时的情形(引自文献[79])
其中“星号”代表正常途径的结果,“圆圈”代表经济方法的结果,
(a) 为 $\beta=0.05$ 的情形,(b) 为 $\beta=0.1$ 的情形

$$d_{\mathrm{eff}}^{i} = hd_i + (1-h)\frac{c_i}{1+\beta k_i}, \tag{8.57}$$

其中 $c_i/(1+\beta k_i)$ 为将节点 i 上积压的信息包 c_i 输送出去所需要的步数。考虑到无标度网上的交通堵塞主要来自于大节点,当大节点发生交通堵塞时,小节点可能还没有达到饱和状态。因此通过将路线调整为非最短路径,从而减缓大节点上的拥堵情况来达到控制交通堵塞的目的。这样一来,系统的网络容量就得到了提升。比如,对给定的 β,如果最短路径方法的临界产生率为 λ_c,当 $\lambda<\lambda_c$ 时,系统处于自由交通相,而当 $\lambda>\lambda_c$ 时,系统则处于交通堵塞相。若采用 EGM 方法,则临界产生率 λ_c 将变大,即网络的容量变大了,因此 EGM 方法的优点就是通过改变路线提升了网络的容量。同样,对于给定的 λ,也存在一个临界值 β_c,当 $\beta>\beta_c$ 时,系统处于自由交通相,而当 $\beta<\beta_c$ 时,系统则处于交通堵塞相。EGM 方法的优点也可看成是降低了 β_c。

尽管 EGM 方法取得了成功,它还有值得改进的地方。比如它只考虑了最近邻上的信息包积压情况,而没有考虑次近邻及更远的中继站上的积压情况。文献[80]弥补了这个缺陷。代替计算有效距离的(8.57)式,计算

$$d(i) = \sum_{s\in\{SP:i,j\}}\frac{c_s}{1+\beta k_s}, \tag{8.58}$$

这里 $\{SP:i,j\}$ 表示从 i 到 j 的最短路线。(8.58)式的特点之一是考虑了时间 t 时路线 $\{SP:i,j\}$ 上所有的信息包积压情况,特点之二是不再需要参数 h 了。改进方法就是选(8.58)式中 $d(i)$ 最小的那个节点作为信息包的下一个中继站。

按照此步骤对 $i \to j$ 路线上的其他中继站的选取作相同的处理。我们将此改进方法叫最优传输策略。当系统处于交通自由相时,EGM 方法及最优传输策略都回到最短路径法。

对给定的 λ,临界点 β_c 可由序参量

$$\eta = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{2m\lambda} \frac{<\Delta n>}{\Delta t} \tag{8.59}$$

来决定,其中 $\Delta n = n(t+\Delta t) - n(t)$, $<\Delta n>$ 表示在时间 t 内对所有点的平均。序参量 $\eta \in [0,1]$ 是 $n(t)$ 在长时间内变化的斜率。当网络处在交通自由相时有 $\eta = 0$, 处在堵塞相时有 $\eta > 0$。β_c 就是从 $\eta = 0$ 到 $\eta > 0$ 的转变点。图 8.18 给出了 BA 网在参数 $N = 1000$, $m = 3$, $\lambda = 0.02$ 时序参数 η 随 β 的变化关系。

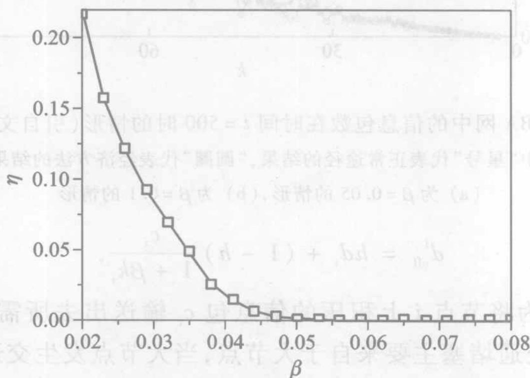


图 8.18　(引自文献[80])

在网络每点,数据包的产生概率为 $\lambda = 0.02$,临界值 β_c 将 β 分为两个领域,

$\beta > \beta_c$ 时,$\eta = 0$;$\beta < \beta_c$ 时,$\eta > 0$

用这个方法可以给出其他 λ 时 β_c 值的大小, 图 8.19 中的"圆圈"给出了 β_c 随 λ 的变化关系。为方便比较, 我们同时给出了 EGM 方法下 $h = 0.8$ 时的 β_c 随 λ 的变化关系("五角星")及最短路径方法下的 β_c 随 λ 的变化关系("方块")。很明显,最优传输策略的 β_c 最低, 即网络容量最大。

由于最优传输策略不是沿着最短路径传输数据包的,而是绕远路来避免网络堵塞,现用平均场理论来给出其演化方程。用 n_k 表示度为 k 的节点的平均数据包数目。在非堵塞状态下,当 $n_k < 1 + \beta k$ 时,我们有

$$\frac{dn_k(t)}{dt} = \lambda k - n_k(t) + k \sum_{k'=k_{\min}}^{k_{\max}} P(k' \mid k) \frac{n_{k'}(t)}{k'} - \lambda < k >, \tag{8.60}$$

其中第一项表示度为 k 的节点上产生的数据包数目,第二项表示度为 k 的节点上每个时间运走的数据包数目, 第三项表示每个时间从该点的邻居传向自己的数据包数目。其中 $P(k \mid k')$ 是度为 k 的点能拥有度为 k' 的邻居的概率, 第四项

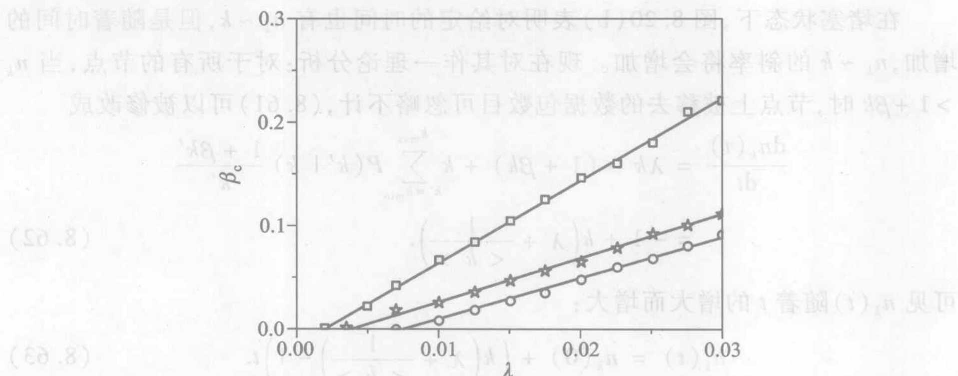


图 8.19 三种路由策略的 $\beta_c(\lambda)$ 的关系图(引自文献[80])

"方块"代表的是最短路径策略;"五角星"代表的是 $h=0.8$ 时的 EGM 策略;

"圆圈"代表的是最优传输策略

表示到达目的地的部分。由 $\mathrm{d}n_k/\mathrm{d}t=0$ 可得定态解:

$$n_k=\left(\lambda+\frac{<n>}{<k>}\right)k-\lambda<k>, \tag{8.61}$$

其中 $<n>=\sum_{k'=k_{\min}}^{k_{\max}}P(k')n_{k'}$ 为平均每个节点上的数据包数目。在非堵塞状态下,当 $<k>=6$ 时,$n_k\sim k$。图 8.20(a) 给出时间分别为 $t=100,200,300$ 时的数值模拟结果。很显然,这三条线重合,与时间无关,因此验证了理论预言 (8.61)。

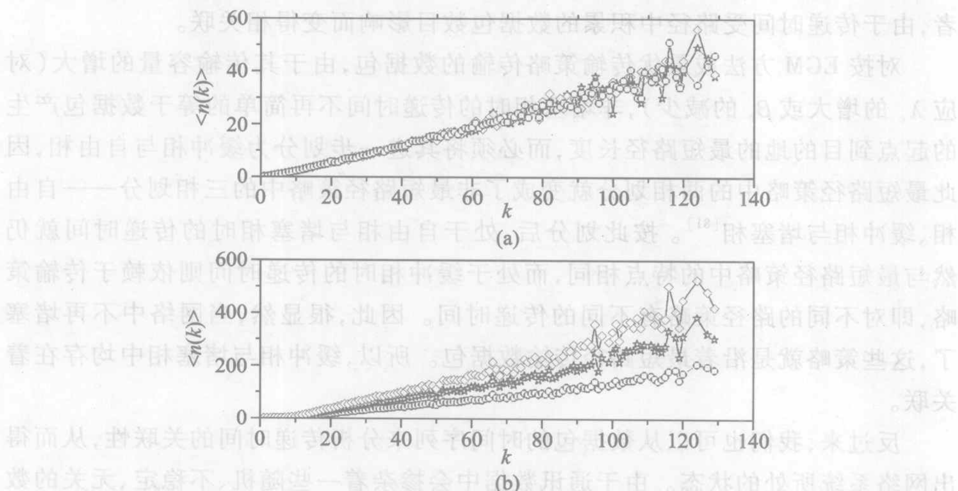


图 8.20 在 $\lambda=0.02$ 时,度为 k 的节点的平均数据包数 n_k 与 k 的关系(引自文献[80])

三条线分别对应时间 $t=100,200,300$。(a) $\beta=0.06(>\beta_c)$,(b) $\beta=0.04(<\beta_c)$

在堵塞状态下，图 8.20(b)表明对给定的时间也有 $n_k \sim k$，但是随着时间的增加，$n_k \sim k$ 的斜率将会增加。现在对其作一理论分析：对于所有的节点，当 $n_k > 1 + \beta k$ 时，节点上被移去的数据包数目可忽略不计，(8.61)可以被修改成

$$\frac{\mathrm{d}n_k(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda k - (1 + \beta k) + k \sum_{k' = k_{\min}}^{k_{\max}} P(k' \mid k) \frac{1 + \beta k'}{k'} = -1 + k\left(\lambda + \frac{1}{< k >}\right). \tag{8.62}$$

可见 $n_k(t)$ 随着 t 的增大而增大：

$$n_k(t) = n_k(0) + \left(k\left(\lambda + \frac{1}{< k >}\right) - 1\right)t. \tag{8.63}$$

这个式子与图 8.20(b)吻合的很好。

8.8　交通数据的去趋势涨落分析

从上节的讨论我们知道，一个信息包从产生到最终到达目的地所需要的传递时间依赖于网络的结构、路由传输策略及因特网的状态等。网上的交通状态通常可分为两相：交通自由相与交通堵塞相。对按最短路径策略传输的数据包，在交通自由状态下，数据包的传递时间就等于该数据包产生的起点到目的地的最短路径长度；在堵塞状态下，数据包的传递时间由于堵塞而处在等待队伍中，因而随时间的增长而变得越来越长。对于前种状态，由于每个数据包都能不需等待的传到目的地，因此不同的数据包的传递时间之间是无关联的。而对于后者，由于传递时间受路径中积累的数据包数目影响而变得相关联。

对按 EGM 方法或最优传输策略传输的数据包，由于其传输容量的增大（对应 λ_c 的增大或 β_c 的减少），非堵塞相时的传递时间不再简单的等于数据包产生的起点到目的地的最短路径长度，而必须将其进一步划分为缓冲相与自由相，因此最短路径策略中的两相划分就变成了非最短路径策略中的三相划分——自由相、缓冲相与堵塞相[81]。按此划分后，处于自由相与堵塞相时的传递时间就仍然与最短路径策略中的特点相同，而处于缓冲相时的传递时间则依赖于传输策略，即对不同的路径策略有不同的传递时间。因此，很显然，当网络中不再堵塞了，这些策略就是沿着最短路径传输数据包。所以，缓冲相与堵塞相中均存在着关联。

反过来，我们也可以从数据包的时间序列来分析传递时间的关联性，从而得出网络系统所处的状态。由于通讯数据中会掺杂着一些随机、不稳定、无关的数据，这使得关联性很难被确定，而 DFA（去趋势涨落分析）就是此时能很好地用来确定关联性的方法，通过过滤掉其多项式趋势来量度涨落的标度特点，从而可

以用来描述累积自相似过程的时间序列的关联性[82-86]。因此,间接测量数据的自相似性就能得到数据间的关联信息。目前,DFA 方法已经成功地应用于分析复杂的心跳[83]、股票[84]及生理学信号等时间序列[86]。

图 8.21 显示了最短路径策略时 $\beta<\beta_c$, $\beta=\beta_c$ 及 $\beta>\beta_c$ 三种情形下网络上的数据包时间序列,很显然 $\beta<\beta_c$(堵塞状态下)的时间序列有个很明显的递增趋势。这个线性递增使得时间序列相对于平均值的涨落不能反映其局部性质,因此 DFA 方法的基本思想就是将这个全局递增趋势去掉后再来研究剩下的涨落部分的关联性。

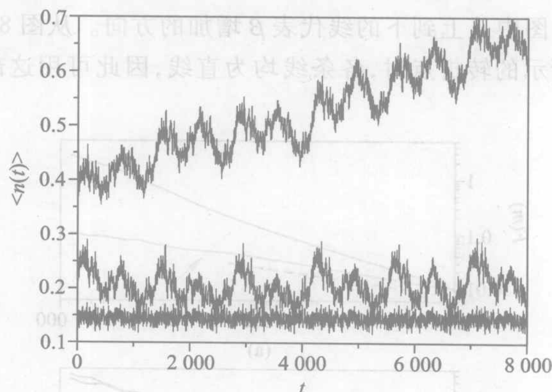


图 8.21 数据包产生率为 $\lambda=0.01$ 时网络中平均每个节点上的数据包数目随时间的变化序列(引自文献[81])

从上到下分别对应于 $\beta=0.005(<\beta_c)$, $\beta=0.006(=\beta_c)$, $\beta=0.1(>\beta_c)$ 时的情形

DFA 也是一种随机行走中标准均方差分析的修改方法。当用 DFA 方法来分析时间序列时,具体步骤如下:

1. 将时间序列 $s(j)$ 做如下的变化,得到累积序列 $y(i)$, $j=1,\cdots,N$(N 是整个序列的长度)

$$y(i) = \sum_{j=1}^{i}[s(j) - \langle s \rangle], \tag{8.64}$$

其中 $\langle s \rangle = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}s(j)$。

2. 把得到的新序列 $y(j)$ 分成相等长度 t,在每个长度 t 中,用最小二乘法进行拟合得到局部趋势 y_{fit}。

3. 在每个长度 t 上,将 $y(j)$ 的趋势去掉:

$$Y_t(i) \equiv y(i) - y_{\text{fit}}(i). \tag{8.65}$$

4. 对每一个长度 t,计算其均方根涨落

$$F(t) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[Y_t(i)\right]^2}\ . \tag{8.66}$$

5. 用不同的长度 t 重复上述步骤。

对于具有幂率关联的标度不变信号,均方差涨落函数 $F(t)$ 与长度大小 t 的关系为

$$F(t) \sim t^{\alpha}, \tag{8.67}$$

α 表示信号的关联度[82-86]:$\alpha=0.5$ 表示无关联,$\alpha>0.5$ 代表有关联。

图 8.22 给出了三种路由策略下的均方差涨落函数 $F(t)$ 随长度大小 t 的变化行为,其中每个图中从上到下的线代表 β 增加的方向。从图 8.22 可以看出在 t 小于图中箭头所示的转折点时,各条线均为直线,因此可用这部分数据来确定斜率 α。

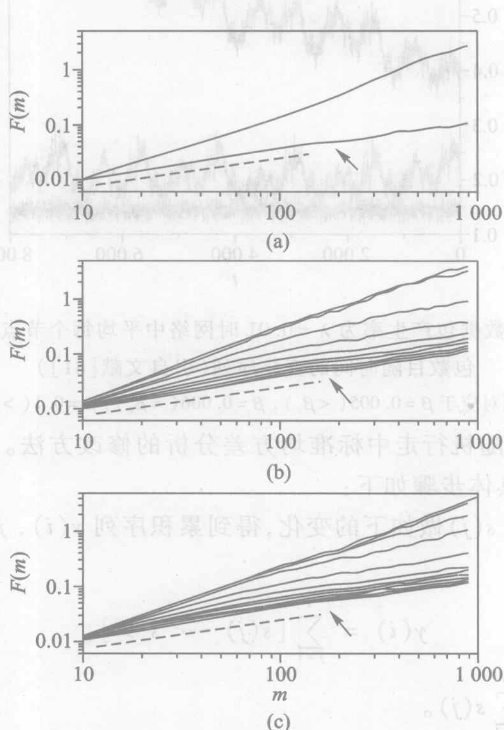


图 8.22　(引自文献[81])

(a)(b)(c)分别表示最短路径策略、EGM 方法、及最优传输策略的 $F(t)$-t,其中虚线代表 $F(t)$ 的斜率

对于图 8.22 中的每个子图,比较具有不同 β 值的线可以看出斜率 α 随着 β 的改变而改变。图 8.23 给出了三种策略下 α 随着 β 的变化关系。从图 8.23 可以看出,在 $\beta>\beta_c$ 时,三种路由策略的 α 都保持为一个不变的常数。但是 $\beta<\beta_c$

时，最短路径策略和非最短路径策略就显示出两种不同的行为：最短路径策略的α有一个突然的跳跃，而EGM方法与最优传输策略的α则随$\beta>\beta_c$的降低而逐步增加，直到β降到图8.23中虚线的位置时才不再降低。对EGM方法与最优传输策略来说，数值模拟揭示当β处于虚线位置与β_c之间时，系统上的信息包因分流并没有完全堵塞，即EGM方法与最优传输策略增大了系统的容量。只有当β小于虚线的位置时，EGM方法与最优传输策略才完全堵塞。如果将发生完全堵塞时的β值统一定义为β_c，则三种策略就具有三个不同的β_c。同时，我们将自由相与缓冲相的分界线定义为β_1。在最短路径策略中，$\beta_1=\beta_c$；在非最短路径策略中，$\beta_1>\beta_c$。当$\beta>\beta_1$时，$\alpha\approx0.5$，通讯数据近似是无关的；当$\beta_c<\beta<\beta_1$时，随着β减小，通讯数据从短程关联趋向长程关联；当$\beta<\beta_c$时，达到全程关联。

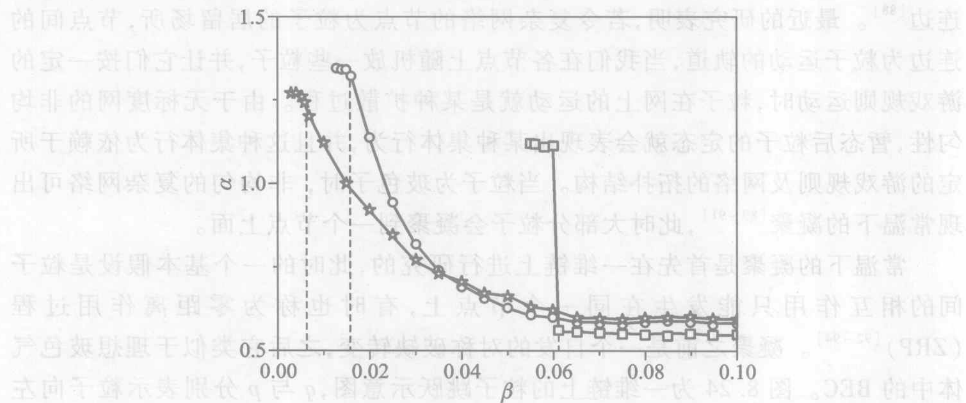


图8.23 标度指数α(纵坐标)随参数β(横坐标)的变化关系(引自文献[81])
其中"方块"、"圆圈"、"星"分别代表最短路径策略、EGM方法、最优传输策略的情形，虚线代表三种方法的缓冲相与堵塞相的分界线

关联对传输策略的依赖性可这样来理解：在最短路径策略中，大多数数据包都要经过网络中的大节点或中心节点，因而数据包首先在中心节点积聚，一旦中心节点处发生堵塞现象，整个网络也就发生堵塞，有时甚至引发雪崩效应。而此时，非中心节点处，数据包并没有积聚。在临界状况时，中心节点上的数据包数目等于$1+\beta_c k_{\mathrm{hub}}$，当$\beta$继续变小导致堵塞发生后，这些中心节点上的数据包数目将线性增加，因此，所有以这些中心节点作为传递中枢站点的数据包都将受到影响。在无标度的通讯网络中，几乎所有的最短路径都经过这些中心节点。因此，这些中心节点上数据包的堵塞将影响整个网络的数据包之间的关联性。

在非最短路径策略中，在$\beta_c<\beta<\beta_1$内，β慢慢变小，中心节点处的数据包数目不会随着时间成线性增加，只略大于$1+\beta_1 k_{\mathrm{hub}}$，这是由于新产生的数据包将绕过这个中心节点来传递。因此，对于一个固定的数据包产生概率，β由β_1处变

小，数据包将绕更长的远路来避免整个网络的堵塞情况。随着β的不断减小，越来越多的节点上的数据包数目大于$1+\beta_1 k_{\text{hub}}$。当度小的节点上的数据包也开始积累时，整个网络就出现了堵塞。因此在$\beta_c<\beta<\beta_1$内，随着β的减小，各个数据包之间传递的关联性越来越强，即图8.23中的α逐渐增大。

8.9 复杂网络上的粒子输运

微观粒子可以分为费米子与玻色子，玻色子在低温时可以表现出一种十分有趣的现象：在动量空间中凝聚。这种现象通常叫做BEC（玻色－爱因斯坦凝聚），可类比于实空间中的物资聚集，如交通流中的阻塞[87]。类似的情形可发生在复杂网络的拓扑结构中，“富者愈富”的原则可导致某些节点拥有大部分的连边[88]。最近的研究表明，若令复杂网络的节点为粒子的居留场所，节点间的连边为粒子运动的轨道，当我们在各节点上随机放一些粒子，并让它们按一定的游戏规则运动时，粒子在网上的运动就是某种扩散过程。由于无标度网的非均匀性，暂态后粒子的定态就会表现出某种集体行为，并且这种集体行为依赖于所定的游戏规则及网络的拓扑结构。当粒子为玻色子时，非均匀的复杂网络可出现常温下的凝聚[89-91]，此时大部分粒子会凝聚到一个节点上面。

常温下的凝聚是首先在一维链上进行研究的，此时的一个基本假设是粒子间的相互作用只能发生在同一个节点上，有时也称为零距离作用过程（ZRP）[92-94]。凝聚之前是一个自发的对称破缺转变，之后它类似于理想玻色气体中的BEC。图8.24为一维链上的粒子跳跃示意图，q与p分别表示粒子向左与向右跳跃的概率。

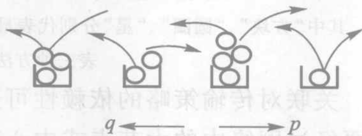


图8.24 一维链上的粒子跳跃 其中q与p分别表示粒子向左与向右跳跃的概率

对零距离作用过程的研究通常采取巨正则系综，这个方法很容易给出每个节点上的平均粒子数[95-98]。对于拥有N个粒子，L个节点的无标度网络，考虑$N, L\to\infty$的极限情况，此时粒子密度为$\rho=N/L$。每个节点$i=1,\cdots,L$可以被任意数目的粒子占有。假定每个节点i上所占粒子数是n_i，其系统的微观态为$\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,\cdots,n_L)$。在动力学过程中，单位时间里每个粒子以某个概率$p_i$跳出所在的节点，$p_i$只取决于节点$i$上的粒子占有数。研究显示，当一维系统粒子的密度$\rho$大于某一临界值$\rho_c$时，相当比例的粒子会凝聚到一个节点上。

考虑到真实的网络一般是无标度网络，纳合（Noh）等人近来研究了无标度网络上的凝聚现象，揭示了无标度网络结构的不同类性质导致的粒子完全凝聚[99,100]。他们的做法如下：为了简单，假设每个节点的跳跃速度都具有同样的

函数 $p_i = p_i(n) = n^\delta$。$\delta = 0$ 表示每步只有一个粒子可以跳出，即节点上的粒子为相互吸引的。$\delta = 1$ 表示 n_i 个粒子都将跳出，即它们变成了没有相互作用的独立粒子的随机运动。同理，$\delta > 1$ 表示粒子间有排斥相互作用，$\delta < 1$ 表示粒子间有吸引相互作用。跳出节点 i 的粒子会以一个转移概率 $T_{i\to j}$ 随机跳向一个邻居 j，由于每个邻居接受此粒子的概率相同，因此 $T_{i\to j} = 1/k_i$。

经历足够长的时间后，系统达到定态。定态时节点 i 上的平均占有数为

$$m_i(z) = x\frac{\partial \ln F_\delta(x)}{\partial x}\bigg|_{x = zk_i}, \tag{8.68}$$

z 代表易度，必须由自洽关系 $\rho = (\sum_{i=1}^{L} m_i)/L$ 确定。$F_\delta(x)$ 为

$$F_\delta(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^\delta}. \tag{8.69}$$

文献[99,100]显示，$\delta = 0$ 时发生完全凝聚，一定比例的粒子会凝聚到中心节点上；而 $\delta = 1$ 时没有凝聚。对于 $0 < \delta < 1$ 得情形，存在一个临界值

$$\delta_c = 1/(\gamma - 1). \tag{8.70}$$

凝聚只发生在 $\delta \leqslant \delta_c$ 的情形。对于 $0 < \delta \leqslant \delta_c$，存在一个转换度 k_c，即度为 k_c 的节点上平均粒子数为 1，度为 $k > k_c$ 的节点上平均粒子数大于 1，度为 $k < k_c$ 的节点上平均粒子数小于 1。k_c 的存在就表明有凝聚，对 $\delta \leqslant \delta_c$ 情形，k_c 可表示为

$$\begin{aligned} k_c &\sim (\ln k_{\max})^{\delta_c}, \quad 若\ \delta = \delta_c, \\ k_c &\sim (k_{\max})^{1-\delta/\delta_c}, \quad 若\ \delta < \delta_c, \end{aligned} \tag{8.71}$$

具有度 $k > k_c$ 的节点就会成为凝聚核心，即大多数粒子会跑到 $k > k_c$ 的节点。

8.10 粒子输运的平均场方法

对于给定的跳跃速度 $p_i(n) = n^\delta$ 及转移概率 $T_{i\to j} = 1/k_i$，除了可以用巨正则系综来讨论粒子的凝聚外，也可以用其他的方法来进行讨论，唐明等发展了一套平均场理论来处理粒子的凝聚[89-91]，并得到了与巨正则系综相同的结论。具体做法如下：

考虑到随着时间 t 的演化，节点 i 上的平均粒子数 n_i 将发生变化，且各节点上的粒子数目会不相同，我们将 n_i 描述转化为按度 k 分类的 $m_k(t)$ 描述，即 $m_k(t)$ 为具有相同度 k 的那些节点上的平均粒子数。相应的，我们将跳跃速度 $p_i(n)$ 转化为跳跃速度 $p(m_k) = m_k^\delta$。由于 m_k^δ 的特殊性，$p(m_k)$ 对 $m_k(t) > 1$ 与 $m_k(t) < 1$ 具有不同的形式，如当 $m_k(t) < 1$ 时我们有 $m_k^\delta > m_k$，考虑到我们并没有 m_k^δ 这么多可跳粒子，因此实际上的跳跃速度只能是 $m_k(t)$ 而非 m_k^δ；而当 $m_k(t) > 1$ 时我们有 $m_k^\delta > m_k$，跳跃速度为 m_k^δ。除了跳出外，同时每个节点还接受

来自于邻居的粒子。跳进的粒子可以分为两部分，一部分来自 $m_k(t)<1$ 的节点，另一部分来自 $m_k(t)>1$ 的节点。如果邻居的度为 k'，则当 $m_k(t)<1$ 时跳进的粒子数为 $P(k'|k)m_{k'}(t)/k'$，当 $m_k(t)>1$ 时跳进的粒子数为 $P(k'|k)m_{k'}^{\delta}(t)/k'$。用 k_0 与 $k_{\max}$ 代表网络的最小与最大度，用 k_c 代表 $m_k(t)=1$ 的度。在 BA 模型中，k_0 为常数，$k_{\max}\sim L^{\beta}$，这里 $\beta=1/(\gamma-1)$。用这些量我们可以得到 $m_k(t)$ 演化的平均场方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial m_k(t)}{\partial t}=-m_k(t)+k\left(\sum\limits_{k_0}^{k_c}p(k'\mid k)\dfrac{m_{k'}(t)}{k'}+\sum\limits_{k_c}^{k_{\max}}p(k'\mid k)\dfrac{m_{k'}^{\delta}(t)}{k'}\right),\ m_k(t)<1,\\ \dfrac{\partial m_k(t)}{\partial t}=-m_k^{\delta}(t)+k\left(\sum\limits_{k_0}^{k_c}p(k'\mid k)\dfrac{m_{k'}(t)}{k'}+\sum\limits_{k_c}^{k_{\max}}p(k'\mid k)\dfrac{m_{k'}^{\delta}(t)}{k'}\right),\ m_k(t)\geqslant 1,\end{cases} \tag{8.72}$$

令方程(8.72)式的右边等于零，可以得到处于稳定态时的平均粒子占有数 m_k。为了具体求出 k_c 和 m_k，我们还须知道跃迁概率 $P(k'|k)$ 的具体形式。为了便于方程的解析，我们选取 BA 网络，因而 $P(k'|k)=k'P(k')/\langle k\rangle$。由此得

$$\begin{cases}m_k=k/k_c, & k<k_c,\\ m_k=(k/k_c)^{1/\delta}, & k\geqslant k_c.\end{cases} \tag{8.73}$$

网络中平均粒子占有数等于粒子数密度，即

$$\overline{m}=\rho=\frac{\sum\limits_{1}^{L}n_i}{L}=N/L。$$

当 $N,L\to\infty$ 时，有

$$\overline{m}=\rho=\int_{k_0}^{k_{\max}}p(k)m_k\mathrm{d}k. \tag{8.74}$$

假定粒子的密度已知，将(8.73)式代入(8.74)式得到

$$\begin{aligned}\overline{m}=\rho&=\int_{k_0}^{k_c}(k/k_c)p(k)\,\mathrm{d}k+\int_{k_c}^{k_{\max}}(k/k_c)^{1/\delta}p(k)\,\mathrm{d}k\\ &\sim\int_{k_c}^{k_{\max}}(k/k_c)^{1/\delta}p(k)\,\mathrm{d}k\\ &\sim k_c^{-1/\delta}\int_{k_c}^{k_{\max}}k^{1/\delta}k^{-\gamma}\,\mathrm{d}k.\end{aligned} \tag{8.75}$$

因为 $\overline{m}$ 是个有限值，必须要求 $\int_{k_c}^{k_{\max}}k^{1/\delta}k^{-\gamma}\mathrm{d}k$ 不发散，故而只有当 $\delta>\delta_c$ 时才能满足，其中 $\delta_c=1/(\gamma-1)$，与(8.70)式一致。假设 $\overline{m}=\rho\sim 1$ 时，可以解得

$$k_c\sim\left(\overline{m}^{-1}\int_{k_c}^{k_{\max}}k^{1/\delta}k^{-\gamma}\mathrm{d}k\right)^{\delta} \tag{8.76}$$

当 $\delta<\delta_c$ 时，由(8.76)可得 $k_c\sim k_{\max}^{1-\delta/\delta_c}$；当 $\delta>\delta_c$ 时，可得 $k_c\sim[\ln k_{\max}]^{\delta_c}$。此结果

与方程(8.71)完全一致。

8.11 加权复杂网络上的粒子输运

上述的讨论是基于节点的各条边等权的假设,然而在许多真实的复杂网络中,与一个节点相连的各条边的权重并不相同。将各条边的权重加起来就是该节点的强度。现已发现,边的权重与所连节点的度之间有着很高的关联,并且节点的强度和度展示了一种幂率特性 $s \sim k^{\alpha}$,其中对不同的网络 α 为不同的常数[101-103]。例如,对于科学合作网络,节点的强度和度之间的关系为线性关系 $s(k) \sim k$;而对于全球航空网,节点的强度和度之间的关系为非线性关系 $s(k) \sim k^{\alpha}, \alpha \approx 1.5$。我们的目的就是弄明白边的权重如何影响粒子凝聚的动力学。

在权重网中,每条边的权重为 w_{ij}。权重可以描述社会网中个体间的亲密度,也可以描述因特网上路由器或光纤的带宽。科学合作网的权重可能是由科学家间合作的频繁程度决定的,而全球航空网的权重可能是由两个相连的城市间直航的总乘客数确定的。在权重网上,我们规定一个跳出节点 i 的粒子,跳向它的邻居 j 的概率因为边的权重的存在而变得不同,即为

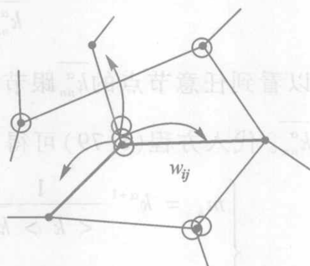


图 8.25 权重网上的粒子跳跃其中 w_{ij} 为从节点 i 到节点 j 的权重

$$T_{i \to j} = k_j^{\alpha} / \sum_{j=1}^{k_i} k_j^{\alpha}. \tag{8.77}$$

图 8.25 为权重网上粒子跃迁的示意图。

我们仍然假定跳跃速度 $p_i(n) = n^{\delta}$,将 n_i 描述转化为按度 k 分类的 $m_k(t)$ 描述,并作与上节相似的分析后可以得到 $m_k(t)$ 演化的平均场方程为[89-91]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial m_k(t)}{\partial t} = -m_k(t) + k\left(\displaystyle\sum_{k_0}^{k_c} P(k' \mid k) m_{k'}(t) \frac{k^{\alpha}}{\sum_{k_i} k_j^{\alpha}} + \sum_{k_c}^{k_{\max}} P(k' \mid k) m_{k'}^{\delta}(t) \frac{k^{\alpha}}{\sum_{k'} k_j^{\alpha}} \right), \\ \qquad m_k(t) < 1, \\ \dfrac{\partial m_k(t)}{\partial t} = -m_k^{\delta}(t) + k\left(\displaystyle\sum_{k_0}^{k_c} P(k' \mid k) m_{k'}(t) \frac{k^{\alpha}}{\sum_{k_i} k_j^{\alpha}} + \sum_{k_c}^{k_{\max}} P(k' \mid k) m_{k'}^{\delta}(t) \frac{k^{\alpha}}{\sum_{k'} k_j^{\alpha}} \right), \\ \qquad m_k(t) \geqslant 1, \end{cases} \tag{8.78}$$

其中 k' 为 k 的邻居,求和 $\sum_{k'} k_j^{\alpha}$ 对 k'的所有邻居进行,$P(k' \mid k) m_{k'}(t) \dfrac{k^{\alpha}}{\sum_{k'} k_j^{\alpha}}$ 与

$P(k'|k)m_{k'}^{\delta}(t)\dfrac{k^{\alpha}}{\sum_{k'}k_j^{\alpha}}$分别为从与 $m_{k'}(t)>1$ 的邻居上跳到 k 的粒子数。令等式右边等于零，我们可以得到系统处于稳定态时的结点上所占粒子数，

$$\begin{cases} m_k = k\left(\sum_{k_0}^{k_c} P(k'|k)m_{k'}\dfrac{k^{\alpha}}{\sum_{k_i}k_j^{\alpha}} + \sum_{k_c}^{k_{\max}} P(k'|k)m_{k'}^{\delta}\dfrac{k^{\alpha}}{\sum_{k'}k_j^{\alpha}}\right), & m_k<1, \\ m_k^{\delta} = k\left(\sum_{k_0}^{k_c} P(k'|k)m_{k'}\dfrac{k^{\alpha}}{\sum_{k_i}k_j^{\alpha}} + \sum_{k_c}^{k_{\max}} P(k'|k)m_{k'}^{\delta}\dfrac{k^{\alpha}}{\sum_{k'}k_j^{\alpha}}\right), & m_k\geqslant 1. \end{cases} \tag{8.79}$$

对于 BA 网络而言，可求出节点的最近邻点的 k^{α} 的平均值

$$\overline{k_{nn}^{\alpha}} = \int_{k_0}^{k_{\max}} P(k'|k)k'^{\alpha}\mathrm{d}k'. \tag{8.80}$$

可以看到任意节点的$\overline{k_{nn}^{\alpha}}$跟节点本身的度没有关系，是一个常数，因而 $\sum_{k'}k_i^{\alpha} = k'\,\overline{k_{nn}^{\alpha}}$。代入方程(8.79)可得

$$\begin{cases} m_k = k^{\alpha+1}\dfrac{1}{\langle k\rangle \overline{k_{nn}^{\alpha}}}\left(\sum_{k_0}^{k_c} P(k')m_{k'} + \sum_{k_c}^{k_{\max}} P(k')m_{k'}^{\delta}\right), & m_k<1, \\ m_k^{\delta} = k^{\alpha+1}\dfrac{1}{\langle k\rangle \overline{k_{nn}^{\alpha}}}\left(\sum_{k_0}^{k_c} P(k')m_{k'} + \sum_{k_c}^{k_{\max}} P(k')m_{k'}^{\delta}\right), & m_k\geqslant 1. \end{cases} \tag{8.81}$$

引入 $A\equiv\dfrac{1}{\langle k\rangle \overline{k_{nn}^{\alpha}}}\left(\sum_{k_0}^{k_c} P(k')m_{k'} + \sum_{k_c}^{k_{\max}} P(k')m_{k'}^{\delta}\right)$，则 $k_c = A^{-1/(1+\alpha)}$，方程(8.81)变为

$$\begin{cases} m_k = (k/k_c)^{\alpha+1}, & k<k_c \\ m_k = (k/k_c)^{(\alpha+1)/\delta}, & k\geqslant k_c. \end{cases} \tag{8.82}$$

同样，我们可以用密度 ρ 来确定 k_c 的取值。当 $L,N\to\infty$ 时，

$$\overline{m} = \rho = \int_{k_0}^{k_c}(k/k_c)^{\alpha+1}p(k)\mathrm{d}k + \int_{k_c}^{k_{\max}}(k/k_c)^{(\alpha+1)/\delta}p(k)\mathrm{d}k, \tag{8.83}$$

是否凝聚我们只需要看上式的第二部分，因为 ρ 是有限值，必须要求 $\int_{k_c}^{k_{\max}}k^{(\alpha+1)/\delta}k^{-\gamma}\mathrm{d}k$ 不发散，故而只有当

$$\delta > \delta_c = (\alpha+1)/(\gamma-1) \tag{8.84}$$

时才能满足。与(8.70)式相比，可见当 $\alpha=0$ 时 δ_c 就回到了无权重的情形。

(8.84)式表明，粒子的凝聚不但取决于跳跃速度的大小，而且也受到边权重的很大影响。粒子以速度 $p(n)=n^{\delta}$ 在复杂网络系统中跳跃，只有当 $\delta\leqslant\delta_c=(\alpha+1)/(\gamma-1)$ 时系统才会发生粒子凝聚现象。在权重网络下 δ_c 有可能大于

或等于 1,取 $\delta = 1(\leqslant \delta_c)$,这时系统中的粒子间没有相互作用却可以发生凝聚现象,这在无权重网络中是不可能出现的。图 8.26 给出了 BA 网上当 $\alpha = 0.4$ 时的凝聚情况,其中"方块"、"星"与"圆圈"分别代表 $\delta = 0.2, 0.5$ 及 0.8 的情形。由(8.84)式可知此时的 $\delta_c = 0.7$,因此 $\delta = 0.2, 0.5$ 时应能观察到凝聚发生,而 $\delta = 0.8$ 时没有凝聚现象。这正是图 8.26 所显示的结论,即在 $\delta = 0.2, 0.5$ 时有与总粒子数可相比的部分聚集在最大的节点上,而 $\delta = 0.8$ 时却没有做到这一点。

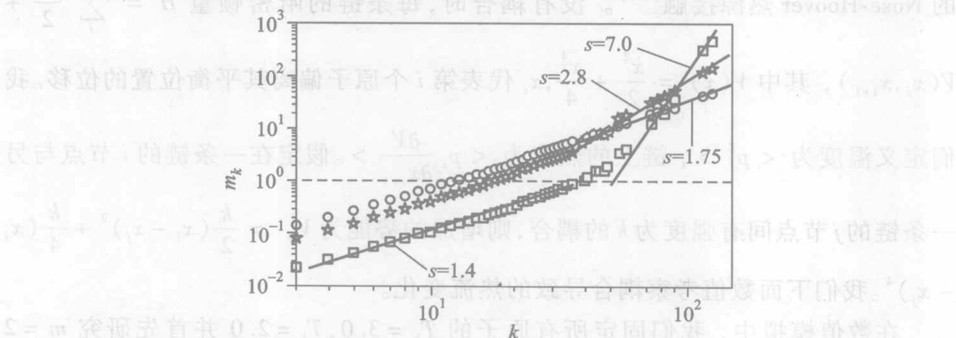


图 8.26 稳定态节点平均占有粒子数(引自文献[89])
$\alpha = 0.4, \delta_c = 0.7$。"方块"代表 $\delta = 0.2$,"五角星"代表 $\delta = 0.5$,"圆圈"代表 $\delta = 0.8, L = 2000, N = 1000$

8.12 简单网络上能量输运

复杂网络上的另一种物理传输过程为能量传输,包括电能与热能的传输。前者多见于人造网中,后者常见于生物网中。目前人们已对电能在复杂网络上的传输做了较深入的研究,发现电的传输随所加的连边数目线性变化[104,105]。对于一对给定电位的源点与汇点,传输的电能依赖于其间的有效电阻。由于复杂网络的电阻可由适用于复杂的串联与并联电路的基尔霍夫第二定律求出[106],复杂网络上电能的传输就归结为等效电阻的求解。与此相反,刘宗华与李保文最近指出[107,108],复杂网络上的热能传输因链间的耦合导致界面热阻的出现,而无法直接使用基尔霍夫第二定律求出等效的热阻,因此复杂网络上的热能传输更具挑战性。

复杂网络可以看成许多条长短不同的一维原子链进行任意的交叉连接而成,在交叉处存在着链间的相互耦合,因而对其上热能的传输可以分三步进行。第一步为单条原子链上的热能传输,这一步的研究已经完成。这里的重点集中在什么是一维链上傅立叶热传导定律成立的充分与必要条件。现已发现,对大多数动量守恒的一维非线性链,热传导显示反常行为,其热传导系数 κ 并非常

数，它与系统大小 N 的关系为 $\kappa \sim N^{\alpha}$[109-112]。第二步为由少数几条原子链构成的简单网络上的热能传输，这一步的主要任务是解决等效热阻的求法。我们将在本节作简单介绍。第三步则为复杂网络上的热能传输。我们将在下节作简单介绍。

考虑 m 条相互交叉的 FPU-β 链[110]，每条链的两端分别与温度为 T_h 与 T_l 的 Nose-Hoover 热源接触[113]。没有耦合时，每条链的哈密顿量 $H = \sum_i \frac{p_i^2}{2} + V(x_i, x_{i+1})$，其中 $V(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$，$x_i$ 代表第 i 个原子偏离其平衡位置的位移。我们定义温度为 $< p_i^2 >$，链上的热流为 $< p_i \frac{\partial V}{\partial x_{i+1}} >$。假定在一条链的 i 节点与另一条链的 j 节点间有强度为 k 的耦合，则增加的势能为 $V_{ij}' = \frac{k}{2}(x_i - x_j)^2 + \frac{k}{4}(x_i - x_j)^4$。我们下面数值考察耦合导致的热流变化。

在数值模拟中，我们固定所有原子的 $T_h = 3.0$，$T_l = 2.0$ 并首先研究 $m = 2$ 的情形。这个温度及后面的 $T = 0.6$ 等均表示模型中的温度，不是真实的绝对温度或摄氏温度，可看成是任意单位。它们的相对大小代表温度的高低。图 8.27 给出了两条全同原子链在 $N = 20$，$k = 1$ 与耦合加在 i 原子与 j 原子间的温度分布

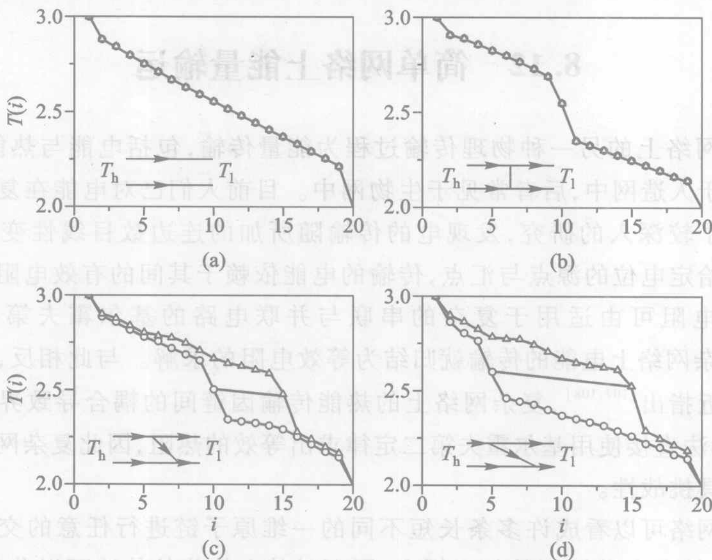


图 8.27 两条耦合原子链的温度分布（引自文献[107]）

$N = 20$，$k = 1$，绿色的细线代表耦合，嵌入图代表耦合构形，(a)代表无耦合的情形，(b)代表耦合在 $i = j = 10$，(c)代表耦合在 $i = 10$，$j = 15$，(d)代表耦合在 $i = 5$，$j = 15$

结果，其中(a)代表无耦合的情形，(b)代表耦合在 $i=j=10$，(c)代表耦合在 $i=10$，$j=15$，(d)代表耦合在 $i=5$，$j=15$。很显然，无论在何处加耦合，耦合处总是与端点一样具有温度跳跃。

图 8.28 给出了对应图 8.27 的热流，箭头代表热流的方向。图 8.28(a)显示的全同结果很容易理解，是因为两条链完全一样且没有耦合。然而图 8.28(b)给出了非常有意思的结果。这个结果完全不同于电路的情形。我们知道四个相等的电阻中间用一条线连接就构成一个对称电路，由于两个连接点之间没有电势差，中间那根连线上就不会有电流，因此整个电路的电流不会发生改变，即与没有中间那根连线的情形一样。

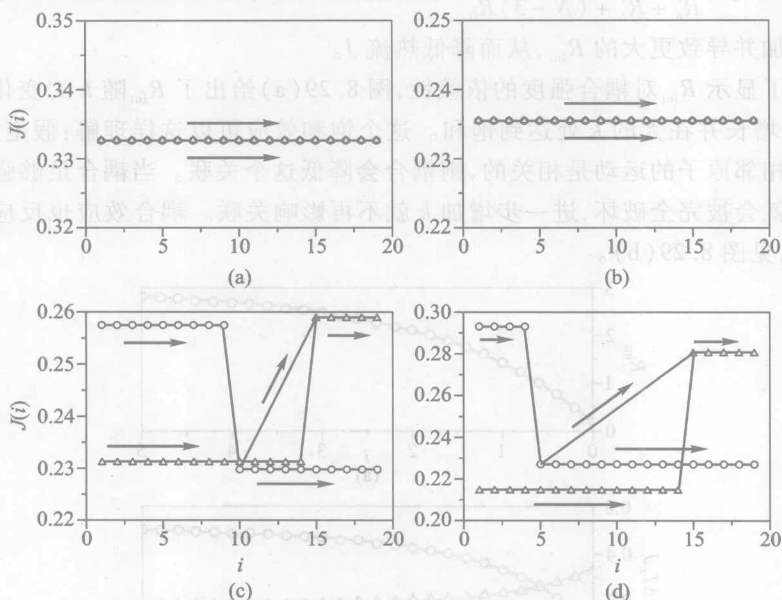


图 8.28 对应于图 8.27 的热流(引自文献[107])
(a)无耦合的情形，(b)耦合在 $i=j=10$，(c)耦合在 $i=10$，$j=15$，(d)耦合在 $i=5$，$j=15$

是什么使得热的回路不同于电路？让我们再来看看温度的定义，温度是物体运动剧烈程度的一种量度，是动能的系综平均。没有耦合时，每条链上的中间那个原子只与它的两个最近邻相连。有耦合时，中间那个原子与三个原子相连，因此改变了其运动方程。即使中间的两个原子具有相同的温度(相同的平均动能与速度分布)，这并不意味着这两个原子总是以相同的方式振荡。这是热的回路与电路完全不同的地方。

耦合原子受到来自于另一条链的耦合力，这使得它的振荡非常不同于同条链上其他的原子。事实上，这等价于在连接处引入了界面热阻。这个界面热阻

也称为卡皮查(Kapitza)热阻[114],定义为 $R_{\text{int}}=\Delta T/J$,这里 ΔT 为界面的左边原子与右边原子间(耦合原子在中间)的跳跃温度。因此穿过链的热流变成

$$J=\frac{T_{\text{h}}-T_{\text{l}}}{R_b^{\text{l}}+R_b^{\text{r}}+(N-5)R_0+R_{\text{int}}},\tag{8.85}$$

其中 $R_0=\dfrac{T(2)-T(N-1)-\Delta T}{(N-5)J}$代表两个相邻原子间的热阻,$R_b^{\text{l}}=\dfrac{T_{\text{h}}-T(2)}{J}$与 $R_b^{\text{r}}=\dfrac{T(N-1)-T_{\text{l}}}{J}$代表两端的边界热阻。显然,由于 $R_{\text{int}}>2R_0$,热流 J 小于没有耦合时的 $J_0=\dfrac{T_{\text{h}}-T_{\text{l}}}{R_b^{\text{l}}+R_b^{\text{r}}+(N-3)R_0}$。随着耦合强度 k 的增加,两个耦合原子间的影响增加并导致更大的 R_{int},从而降低热流 J。

为了显示 R_{int} 对耦合强度的依赖性,图 8.29(a)给出了 R_{int} 随 k 的变化,可见 R_{int} 随 k 增长并在大的 k 处达到饱和。这个饱和效应可以这样理解:假定无耦合时两个相邻原子的运动是相关的,则耦合会降低这个关联。当耦合足够强时,这个关联就会被完全破坏,进一步增加 k 就不再影响关联。耦合效应也反应在 ΔT 与 J 上,见图 8.29(b)。

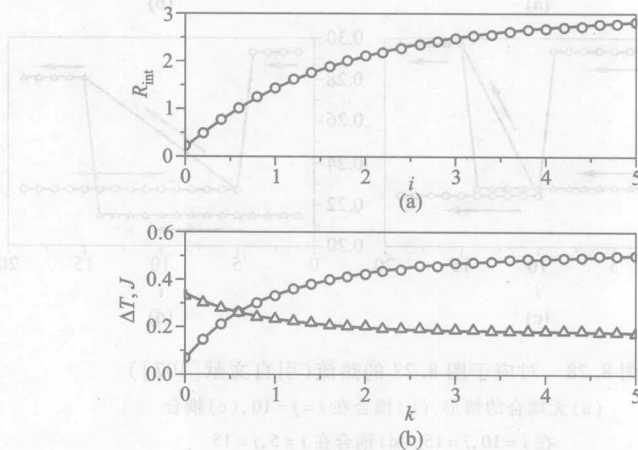


图 8.29 对应于图 8.27(b)的耦合强度的影响(引自文献[107])
(a)R_{int} 随 k 的变化,(b)"圆圈"代表 ΔT 随 k 的变化,"三角形"代表 J 随 k 的变化

相同的解释可用于图 8.28 的(c)与(d)。我们在不同长度的耦合链及多条耦合链上也观察到了类似的情形[107]。考虑到复杂网络中还存在大量的自耦合或捷径,我们来讨论一条单链上的自耦合效应。如果一条链上的 i 原子与 j 原子间存在耦合,这个耦合如何影响热流?图 8.30 给出了结果,(a)中向上的"三角形"为 $N=20,k=1,i=5$ 及 $j=15$ 时的结果。将其与无耦合的图 8.28(a)相比,

可见热流被极大地降低了。图 8.30(a) 中的"圆圈"与向下的"三角形"分别代表 $k=0.5$ 与 $k=2$ 的情形，从这个图的中间部分，我们知道大的耦合使得更少的热流穿过原来的路径。图 8.30(b) 给出了热流随耦合强度 k 的变化，其中"圆圈"代表总热流，"三角形"代表穿过捷径的热流。显然，当 $k>1$ 后，总热流逐渐稳定，而穿过捷径的热流随 k 单调增加，证实了图 8.29 中揭示的饱和效应。至此，我们得出结论：耦合诱导界面热阻是网络中普遍存在的现象，因此，基尔霍夫第二定律不能直接被用于复杂网络中求出等效的热阻。

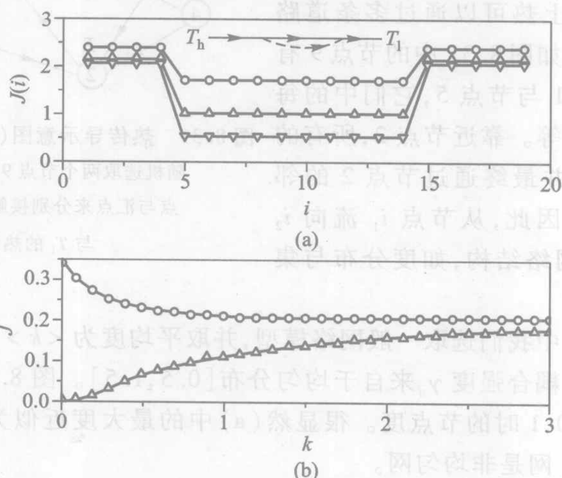


图 8.30 (引自文献[107])

(a)中的"圆圈"、向上的"三角形"与向下的"三角形"分别代表 $k=0.5,1.0,2$ 时的情形；(b)给出了热流随耦合强度 k 的变化，其中"圆圈"代表总热流，"三角形"代表穿过捷径的热流

8.13 复杂网络上能量输运

我们现在讨论热能在复杂网络上的传播。此时节点代表原子链间的交点，边代表两个相连的节点间的原子链部分。为方便起见，我们用弹簧代替边，即节点是由弹簧连接或耦合的。考虑到热传导系数 κ 对系统大小的依赖性[115-117]，我们用不同的耦合强度来反应两个相连的节点间不同的链长，并让耦合强度服从一个给定的分布。因此我们得到了不同边权的加权网。假定网是嵌入在二维物理空间，则可用图 8.31 表示其示意图。这里我们随机选取节点 $i_1=9$ 与 $i_2=2$ 来连接温度分别为 T_h 与 T_l 的热源。一个有趣的问题是从 i_1 流向 i_2 的热流如何依赖于网络结构。

我们假定每个节点沿其平衡位子振荡，因此每个节点 i 可以被当作一个一维

FPU $-\beta$ 模型,其哈密顿量 $H_i = E_i^k + E_i^V, E_i^k = \sum_i \frac{p_i^2}{2}, E_i^V = \frac{1}{2}\sum_j \gamma_{ij}\left[\frac{1}{2}(x_j - x_i)^2 + \frac{1}{4}(x_j - x_i)^4\right]$,$x_i$ 代表第 i 个原子偏离其平衡位置的位移,γ_{ij} 为节点 i 与 j 间的耦合强度,求和对节点 i 的所有邻居 j 进行。不同于热只能通过一条路径传播的一维情形,网络上热可以通过多条道路从 i_1 流向 i_2。比如图 8.31 中的节点 9 有两个邻居:节点 1 与节点 5,它们中的每个又有四个邻居等。靠近节点 2,所有的流将逐渐汇合,并最终通过节点 2 的邻居流入节点 2。因此,从节点 i_1 流向 i_2 的热流依赖于网络结构,如度分布与集聚系数等。

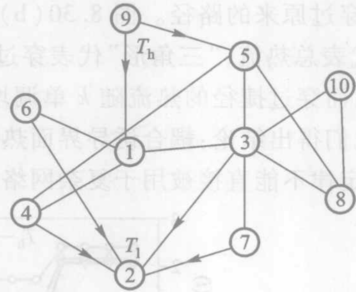


图 8.31 热传导示意图(引自文献[108])
随机选取两个节点 9 和 2 作为源点与汇点来分别接触温度为 T_h 与 T_1 的热源

在数值模拟中我们选取一般网络模型,并取平均度为 $\langle k \rangle = 4$,网络大小 $N = 100$,每条边的耦合强度 γ_{ij} 来自于均匀分布[0.5,1.5]。图 8.32 的(a)与(b)分别给出了 $p = 0, 1$ 时的节点度。很显然(a)中的最大度近似为(b)中的两倍,表明 $p = 0$ 的 BA 网是非均匀网。

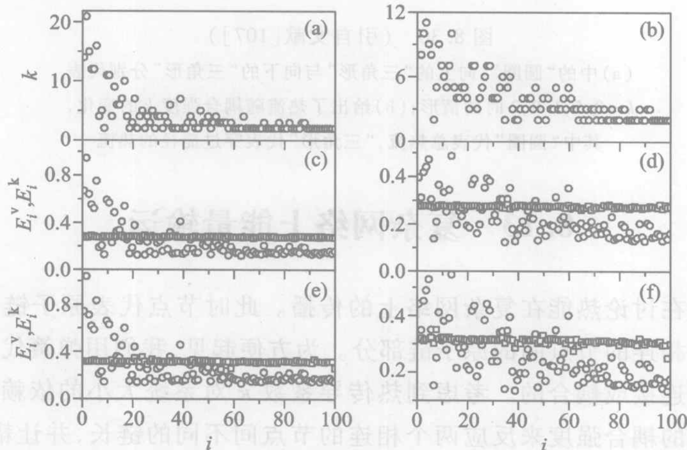


图 8.32 (引自文献[108])
(a)(b)为节点度;(c)(d)为在平衡温度 $T = 0.6$ 时与(a)(b)对应的动能("方块")与势能("圆圈");(e)(f)为 $T_h = 0.7$ 与 $T_1 = 0.5$ 时,一对任意选取的节点 i_1 与 i_2 在定态时的动能("方块")与势能("圆圈"),其中(a)(c)与(e)代表 $p = 0$ 的无标度网,(b)(d)与(f)代表 $p = 1$ 的随机网

我们首先让网络演化到温度为 $T=0.6$ 时的热平衡态。图 8.32(c)与(d)分别显示了 $p=0,1$ 时各节点上的动能 E_i^k 与势能 E_i^V。很容易看出,由于相同的温度导致 E_i^k 近似为常数;然而 E_i^V 并非常数,而是具有与图 8.32(a)与(b)对应的相似分布,表明具有较多边的节点具有较大的势能。其原因是在平衡时,每个节点具有相同的 E_i^k,因而相同大小的振荡或位移 x_i,导致每条边对 E_i^V 有近似相同的贡献,因此 E_i^V 正比于节点的度。

然后我们研究能量脉冲的扩散,即在平衡态时($t=0$)随机选取一个节点 i_1,并给其加能量脉冲 $\Delta E_{i1}=9E_{i1}^k$。在 $T=0.6$ 的情形,从图 8.32(c),我们知道 $E_{i1}^k\approx0.28$,因此 $\Delta E_{i1}\approx2.5$。随着时间演化,这个能量脉冲将逐渐扩散到其邻居,然后邻居的邻居等。图 8.33 给出 $p=0$ 的无标度网上的演化过程,其中(a)(b)分别代表 ΔE_{i1}^k 与 ΔE_{i1}^V 在源点 i_1 处的演化;(c)(d)代表源点的三个邻居的演化;(e)(f)代表(c)(d)中实线的四个邻居上的演化。很容易看出图 8.33 中(b)到(f)的所有情形在开始时都是零,然后随时间逐渐增加,表明能量脉冲是从源点 i_1 扩散到邻居,然后邻居的邻居等。一个有趣的现象是不论 ΔE_{i1} 的减少,还是其他 ΔE_i^k 与 ΔE_i^V 的增加,都不是单调,而是振荡式的。这就与电能的光滑衰减形成鲜明的对比。

这种振荡式的扩散可以这样来理解:能量扩散是通过两个相邻节点间的势

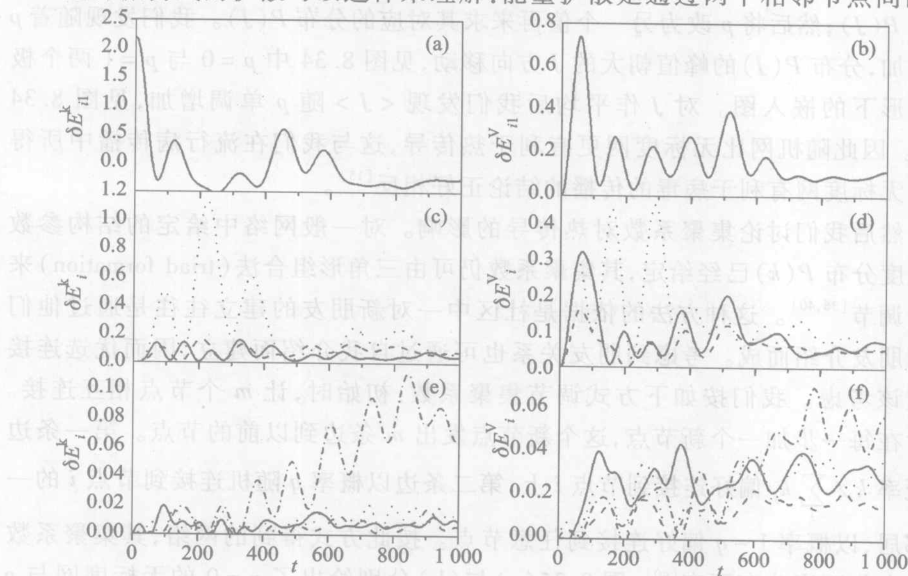


图 8.33　无标度网上的热扩散(引自文献[108])

(a)(b)代表源点 i_1 上的演化;(c)(d)代表源点的三个邻居的演化;

(e)(f)代表(c)(d)中实线的四个邻居上的演化

能变化来实现的。由于节点的变化使得势能做周期性的改变,节点 i 上能量的损失与获得,依赖于它自身及其邻居的瞬时状态,因此能量可以在 t_1 时从 i 传向邻居,也可以在 t_2 时将其中的部分能量从邻居传回给 i,这样就导致能量的振荡式传播。我们在其他 p 时也观察到了类似的现象。

热传导可看成是大量能量脉冲从源到汇的连续扩散。为了研究网络结构的影响,我们随机选取两个节点 i_1 与 i_2,并让它们分别接触温度为 T_h 与 T_l 的热源。热源 T_h 将连续为节点 i_1 提供能量脉冲,然后能量通过耦合扩散到其他节点,最后在节点 i_2 处为热源 T_l 所吸收。暂态后网络达到稳定态,图 8.32(e)与(f)给出了对一对任意选取的 i_1 与 i_2,网络达到稳定后的动能与势能分布。将随机网情形的图 8.32(f)与图 8.32(d)相比,很容易看出 E_i^k 与 E_i^V 得到了重新分配,其变化范围变大了。类似的情形也可以在无标度网中观察到,见图 8.32(c)与(e),很显然(c)中的最大势能 E_i^V 小于 1.0 而(e)中的最大势能 E_i^V 大于 1.0。因此从 i_1 到 i_2 的热流 J 是由这个重新分配决定的。

热流 J 不但依赖于所选取的 i_1 与 i_2 也依赖于网络拓扑,如度分布与集聚系数等。对一个给定的拓扑,我们用蒙特卡洛模拟对各种 i_1 与 i_2 对的实现所获得的 J 进行系综平均,并将其记为 $<J>$。我们首先讨论度分布的影响:对一般网络模型,我们固定一个 p 来求各种可能的 i_1 与 i_2 对所给出的 J,这些 J 构成一个分布 $P(J)$;然后将 p 改为另一个值再来求其对应的分布 $P(J)$。我们发现随着 p 的增加,分布 $P(J)$ 的峰值朝大的 J 方向移动,见图 8.34 中 $p=0$ 与 $p=1$ 两个极限情形下的嵌入图。对 J 作平均后我们发现 $<J>$ 随 p 单调增加,见图 8.34(a)。因此随机网比无标度网更有利于热传导,这与我们在流行病传播中所得出的无标度网有利于病毒的传播的结论正好相反[15]。

然后我们讨论集聚系数对热传导的影响。对一般网络中给定的结构参数 p,其度分布 $P(k)$ 已经给定,其集聚系数仍可由三角形组合法(triad formation)来进行调节[36,40]。这种方法的依据是社区中一对新朋友的建立往往是通过他们共同朋友介绍而成。考虑到朋友关系也可通过自我介绍而建立,因而优选连接也应该考虑。我们按如下方式调节集聚系数:初始时,让 m 个节点相互连接。然后在每一步加一个新节点,这个新节点发出 m 条边到以前的节点。第一条边以概率 $k_i/\sum_j k_j$ 偏好连接到节点 i 上,第二条边以概率 q 随机连接到节点 i 的一个邻居,以概率 $1-q$ 偏好连接到任意节点。按此方式得到的网络,其集聚系数随 q 变化而度分布不变[40],图 8.35(a)与(b)分别给出了 $p=0$ 的无标度网与 $p=1$ 的随机网上集聚系数 C 随 q 的变化。很显然,C 正比于 q。

按此方法我们首先得到一个固定 p 与 q 的网络,然后我们做与考察度分布对热传导的影响相同的步骤,来探讨集聚系数对热传导的影响。我们的数值模

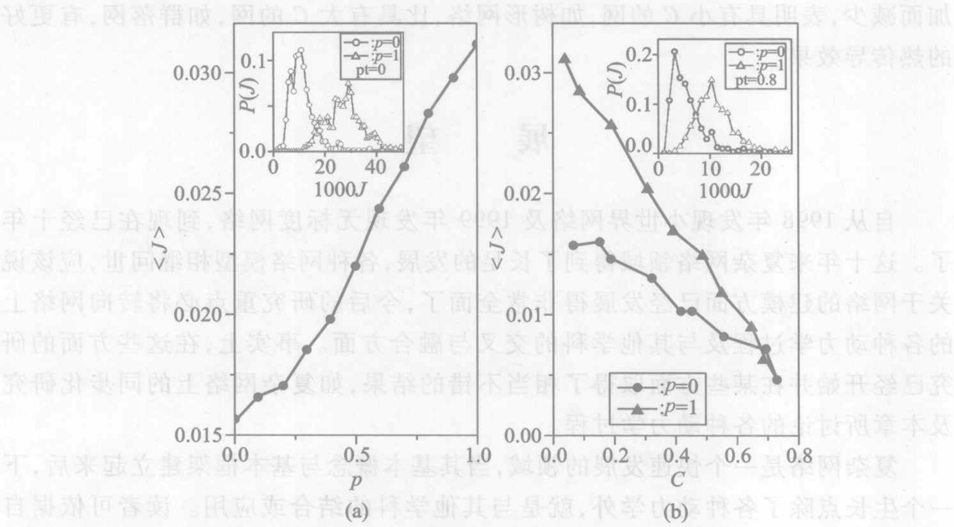


图 8.34 平均热流 $<J>$ 随网络拓扑的变化(引自文献[108])

插入图为热流分布函数 $P(J)$。这里平均次数为 100 个实现，参数为 $N=100$，$<k>=4, T_h=0.7, T_l=0.5$。(a) $<J>$ 随一般网络的结构参数 p 的变化；(b) $<J>$ 随集聚系数 C 的变化，其中“圆圈”代表 $p=0$ 的无标度网情形，“三角形”代表 $p=1$ 的随机网情形

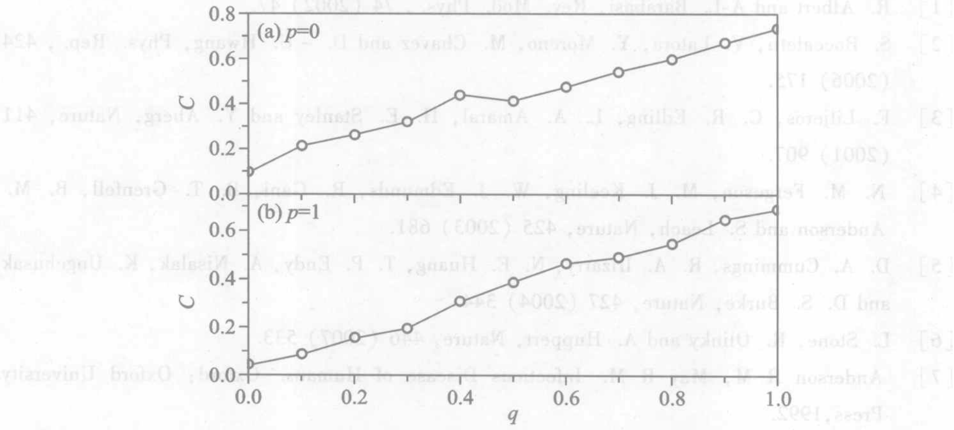


图 8.35 集聚系数 C 对参数 q 的依赖性(引自文献[108])

这里网络大小为 $N=100$，(a) $p=0$ 的无标度网情形；(b) $p=1$ 的随机网情形

拟证实：集聚系数也能极大地影响热流 J 的分布，图 8.34(b)中的嵌入图显示了 $q=0.8$ 时的热流分布 $P(J)$，此时对 $p=0$ 无标度网有 $C=0.6$，对 $p=1$ 的随机网有 $C=0.55$。图 8.34(b)给出了平均量 $<J>$ 随 C 的变化，其中“圆圈”代表 $p=0$ 的无标度网情形，“三角形”代表 $p=1$ 的随机网情形。很显然，$<J>$ 随 C 的增

加而减少,表明具有小 C 的网,如树形网络,比具有大 C 的网,如群落网,有更好的热传导效果。

展 望

自从 1998 年发现小世界网络及 1999 年发现无标度网络,到现在已经十年了。这十年来复杂网络领域得到了长足的发展,各种网络模型相继问世,应该说关于网络的建模方面已经发展得非常全面了,今后的研究重点必将转向网络上的各种动力学过程及与其他学科的交叉与融合方面。事实上,在这些方面的研究已经开始并在某些方面取得了相当不错的结果,如复杂网络上的同步化研究及本章所讨论的各种动力学过程。

复杂网络是一个快速发展的领域,当其基本概念与基本框架建立起来后,下一个生长点除了各种动力学外,就是与其他学科的结合或应用。读者可依据自己的学科背景,将复杂网络的基本原理应用到自己所熟悉的领域,则必将对复杂网络上的动力学作出新的贡献。

第八章参考文献

[1] R. Albert and A-L. Barabasi, Rev. Mod. Phys., 74 (2002) 47.

[2] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez and D. – U. Hwang, Phys. Rep., 424 (2006) 175.

[3] F. Liljeros, C. R. Edling, L. A. Amaral, H. E. Stanley and Y. Aberg, Nature, 411 (2001) 907.

[4] N. M. Ferguson, M. J. Keeling, W. J. Edmunds, R. Gani, B. T. Grenfell, B. M. Anderson and S. Leach, Nature, 425 (2003) 681.

[5] D. A. Cummings, R. A. Irizarry, N. E. Huang, T. P. Endy, A. Nisalak, K. Ungchusak and D. S. Burke, Nature, 427 (2004) 344.

[6] L. Stone, R. Olinky and A. Huppert, Nature, 446 (2007) 533.

[7] Anderson R M, May R M. Infectious Disease of Humans. Oxford: Oxford University Press, 1992.

[8] Bailey N. T. J. The Mathematical Theory of Infectious Diseases. 2nd ed. Berlin: Springer Verlag, 1993.

[9] Z. Liu, Y. C. Lai and N. Ye, Phys. Rev. E, 67 (2003) 031911.

[10] V. M. Eguiluz and K. Klemm, Phys. Rev. Lett., 89 (2002) 108701.

[11] M. E. J. Newman, Phys. Rev. Lett., 89 (2002) 208701.

[12] M. E. J. Newman and Park, Phys. Rev. E, 68 (2003) 036122; M. E. J. Newman and M. Girvan, Phys. Rev. E, 69 (2004) 026113; E. M. Jin, M. Girvan and M. E. J.

Newman, Phys. Rev. E, 64 (2001) 046132.

[13] Z. Liu and B. Hu, Europhys. Lett., 72 (2005) 315.

[14] M. Barthelemy, R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, Phys. Rev. Lett., 92 (2004) 178701.

[15] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, Phys. Rev. Lett., 86 (2001) 3200.

[16] M. Boguna, R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, Phys. Rev. Lett., 90 (2003) 028701.

[17] R. Olinky and L. Stone, Phys. Rev. E, 70 (2004) 030902.

[18] M. E. J. Newman, Phys. Rev. E, 66 (2002) 016128.

[19] Y. Moreno, R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, Euro. Phys. J. B, 26 (2002) 521.

[20] Y. Moreno, J. B. Gomez and A. F. Pacheco, Phys. Rev. E, 68 (2003) 035103.

[21] Y. Moreno, M. Nekovee and A. Vespignani, Phys. Rev. E, 69 (2004) 055101.

[22] H. Zhang, Z. Liu, and W. Ma, Chin. Phys. Lett., 23 (2006) 1050.

[23] P. Crepey, F. P. Alvarez and M. Barthelemy, Phys. Rev. E, 73 (2006) 046131.

[24] A. Vazquez, Phys. Rev. Lett., 96 (2006) 038702.

[25] T. Zhou, J. Liu, W. Bai, G. Chen and B. Wang, Phys. Rev. E, 74 (2006) 056109.

[26] M. Kuperman and G. Abramson, Phys. Rev. Lett., 86 (2001) 2909.

[27] G. Yan, Z. Fu, J. Ren and W. Wang, Phys. Rev. E, 75 (2007) 016108.

[28] A. Grabowski and R. A. Kosinski, Phys. Rev. E, 70 (2004) 031908.

[29] V. Colizza, A. Barrat, M. Barthelemy and A. Vespignani, Inter. J. of Bif. Chaos, 17 (2007) 2491.

[30] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, Phys. Rev. E, 63 (2001) 066117.

[31] Pastor-Satorras R, Vespignani A. in Handbook of Graphs and Networks: From the Genome to the Internet, ed. by S. Bornholdt and H. G. Schuster. Berlin: Wiley-VCH, 2002:113 –132.

[32] A. J. Sudbury, Appl. Prob., 22 (1985) 443.

[33] D. H. Zanette, Phys. Rev. E, 64 (2001) 050901; *ibid*, 65 (2002) 041908.

[34] Y. Moreno, M. Nekovee and A. F. Pacheco, Phys. Rev. E, 69 (2004) 066130.

[35] J. Zhou, Z. Liu and B. Li, Phys. Lett. A, 368 (2007) 458.

[36] P. Holme and B. J. Kim, Phys. Rev. E, 65 (2002) 026107.

[37] J. Noh, H. Jeong, Y. Ahn and H. Jeong, Phys. Rev. E, 71 (2002) 036131.

[38] J. Sun and M. W. Deem, Phys. Rev. Lett., 99 (2007) 228107.

[39] J. M. Kumpula, J. Onnela, J. Saramaki, K. Kaski and J. Kertesz, Phys. Rev. Lett., 99 (2007) 228701.

[40] X. Wu and Z. Liu, Physica A, 387 (2008) 623.

[41] Marro J, Dickman R. Nonequilibrium phase transitions in lattice models. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[42] Y. Zhou, Z. Liu and J. Zhou, Chin. Phys. Lett., 24 (2007) 581.

[43] A. Vecchio, L. Primavera and V. Carbone, Phys. Rev. E, 73 (2006) 031913.

[44] D. H. Zanette and M. Kuperman, Physica A, 309 (2002) 445.

[45] R. Cohen, S. Havlin and D. ben-Avraham, Phys. Rev. Lett. ,91 (2003) 247901.

[46] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, Phys. Rev. E, 65 (2002) 036104.

[47] L. K. Gallos, F. Liljeros, P. Argyrakis, A. Bunde and S. Havlin, Phys. Rev. E, 75 (200) 045104.

[48] T. Vicsek, A. Czirok, E. Ben-Jacob, I. Cohen and O. Shochet, Phys. Rev. Lett. , 75 (1995) 1226.

[49] A. Buscarino, L. Fortuna, M. Frasca and A. Rizzo, Chaos, 16 (2006) 015116.

[50] M. Gonzalez and H. J. Herrmann, Physica A, 340 (2004) 741.

[51] M. Frasca, A. Buscarino, A. Rizzo, L Fortuna and S. Boccaletti, Phys. Rev. E, 74 (2006) 036110.

[52] M. Gonzalez, P. G. Lind and H. J. Herrmann, Phys. Rev. Lett. , 96 (2006) 088702.

[53] J. Zhou and Z. Liu, Front. Phys. China, 3 (2008) 331.

[54] R. Radner, J. Econ. Lite. , 30 (1992) 1382; R. Radner, Econometrica, 61 (1993) 1109.

[55] B. A. Huberman and R. M. Lukose, Science, 77 (1997) 535.

[56] H. Li and M. Manesca, IEEE Trans. Comput. , 38 (1989) 1345.

[57] E. W. Leland, M. S. Taqqu, W. Willinger and D. V. Wilson, ACM/SIGCOMM Comput. Commun. Rev. , 23 (1993) 183.

[58] M. S. Taqqu, W. Willinger and R. Sherman, ACM/SIGCOMM Comput. Commun. Rev. , 27 (1997) 5.

[59] A. E. Crovella and A. Bestavros, IEEE Trans. Networking, 5 (1997) 835.

[60] M. Faloutsos, P. Faloutsos and C. Faloutsos, Comput. Commun. Rev. , 29 (1999) 251.

[61] T. Ohira and R. Sawatari, Phys. Rev. E, 58 (1998) 193.

[62] H. Fuks and A. T. Lawniczak, Math. Comp. Sim. , 51 (1999) 101.

[63] R. V. Sole and S. Valverde, Physica A, 289 (2001) 595.

[64] A. Arenas, A. Diaz-Guilera and R. Guimera, Phys. Rev. Lett. , 86 (2001) 3196.

[65] R. Guimera, A. Arenas and A. Diaz-Guilera, Physica A, 299 (2001) 247

[66] R. Guimera, A. Arenas, A. Diaz-Guilera and F. Giralt, Phys. Rev. E, 66 (2002) 026704.

[67] M. Woolf, D. K. Arrowsmith, R. J. Mondragon-C and J. M. Pitts, Phys. Rev. E, 66 (2002) 046106.

[68] S. Valverde and R. V. Sol, Physica A, 312 (2002) 636.

[69] R. Guimera, A. Diaz-Guilera, F. Vega-Redondo, A. Cabrales and A. Arenas, Phys. Rev. Lett. , 89 (2002) 248701.

[70] A. Arenas, L. Danon, A. Diaz-Guilera and R. Guimera, Lecture notes in computer science, XVIII Computational science-ICCS, 3038 (2004) 1076.

[71] A. Arenas, A. Cabrales, A. Diaz-Guilera, R. Guimera R and F. Vega-Redondo, Lecture notes in physics, statistical mechanics of complex networks, XVIII Sitges conference on

statistical mechanics, 625 (2003) 175.

[72] Nelson H. Probability, stochastic processes, and queueing theory: the mathematics of computer performance modeling. New York: Springer,1995.

[73] P. Echenique, J. Gomez-Gardenes and Y. Moreno, Phys. Rev. E, 70 (2004) 056105.

[74] P. Echenique, J. Gomez-Gardenes and Y. Moreno, Europhys. Lett., 71 (2005) 325.

[75] Y. Moreno, R. Pastor-Satorras, A Vazquez and A. Vespignani, Europhys. Lett., 62 (2003) 292.

[76] G. Yan, T. Zhou, B. Hu, Z. Fu and B. Wang, Phys. Rev. E, 73 (2006) 046108.

[77] W. Wang, B. Wang, C. Yin, Y. Xie and T. Zhou, Phys. Rev. E, 73 (2006) 026111.

[78] L. Zhao, Y. C. Lai, K. Park and N. Ye, Phys. Rev. E, 71 (2005) 026125. (This work is initiated by Z. Liu.)

[79] Z. Liu, W. Ma, H. Zhang, Y. Sun and P. M. Hui, Physica A, 370 (2006) 843.

[80] H. Zhang, Z. Liu, M. Tang and P. M. Hui, Phys. Lett. A, 364 (2007) 177.

[81] X. Zhu, Z. Liu and M. Tang, Chin. Phys. Lett., 24 (2007) 2142.

[82] C. Peng, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H. E. Stanley and A. L. Goldberger, Phys. Rev. E, 49 (1994) 1685.

[83] C. Peng, S. Havlin, H. E. Stanley and A. L. Goldberger, Chaos, 5 (1995) 82.

[84] Y. Liu, P. Gopikrishnan, P. Cizeau, M. Meyer, C. Peng and H. E. Stanley, Phys. Rev. E, 60 (1999) 1390.

[85] H. Yang, F. Zhao, L. Qi and B. Hu, Phys. Rev. E, 69 (2004) 066104.

[86] Z. Chen, K. Hu, P. Carpena, P Bernaola-Galvan, H. E. Stanley and P. Ivanov, Phys. Rev. E, 71 (2005) 011104.

[87] M. R. Evans, Braz. J. Phys., 30 (2000) 42.

[88] G. Bianconi and A-L. Barabasi, Phys. Rev. Lett., 86 (2001) 5632.

[89] M. Tang, Z. Liu and J. Zhou, Phys. Rev. E, 74 (2006) 036101.

[90] M. Tang, Z. Liu, Physica A, 387 (2008) 1361.

[91] M. Tang, Z. Liu, Commun. Theo. Phys., 49 (2008) 252.

[92] F. Spitzer, Adv. Math., 5 (1970) 246.

[93] S. GroBkinsky, G. M. Schutz and H. Spohn, J. Stat. Phys., 113 (2003) 389.

[94] M. R. Evans and T. Hanny, cond-mat/0501338 (2005).

[95] S. N. Majumdar, M. R. Evans and R. K. Zia, Phys. Rev. Lett., 94 (2005) 180601.

[96] M. R. Evans, Braz. J. Phys., 30 (2000) 42.

[97] M. R. Evans, Y. Kafri, H. M. Koduvely and D. Mukamel, Phys. Rev. Lett., 80 (1998) 425.

[98] Y. Kafri, E. Levine, D. Mukamel, G. M. Schutz and J. Torok, Phys. Rev. Lett., 89 (2002) 035702.

[99] J. D. Noh, G. M. Shim and H. Lee, Phys. Rev. Lett., 94 (2005) 198701.

[100] J. D. Noh, Phys. Rev. E, 72 (2005) 056123.

[101] A. Barrat, M. Barthelemy, R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, Proc. Natl. Acad.

Aci. USA, 101 (2004) 3747.

[102] A. Barrat, M. Barthelemy and A. Vespignani, Phys. Rev. Lett., 92 (2004) 228701.

[103] K-I. Goh, B. Kahng and D. Kim, cond-mat/0410078 (2006).

[104] S. Kumar, J. Y. Murthy and M. A. Alam, Phys. Rev. Lett., 2005, 95: 066802

[105] M. V. Chubynsky and M. F. Thorpe, Phys. Rev. E, 2005, 71: 056105

[106] E. Lopez, S. V. Buldyrez, S. Havlin and H. E. Stanley, Phys. Rev. Lett., 94 (2005) 248701.

[107] Z. Liu and B. Li, Phys. Rev. E, 76 (2007) 051118.

[108] Z. Liu and B. Li, unpublished.

[109] B. Hu, B. Li and H. Zhao, Phys. Rev. E, 57 (1998) 2992; 61 (2000) 3828; K. Aoki and D. Kusnezov, Phys. Lett. A, 265 (2000) 250.

[110] H. Kaburaki and M. Machida, Phys. Lett. A, 181 (1993) 85; A. Fillipov, B. Hu, B. Li and A. Zeltser, J. Phys. A, 31 (1998) 7719; K. Aoki and D. Kusnezov, Phys. Rev. Lett., 86 (2001) 4029.

[111] O. Narayan and S. Ramaswamy, Phys. Rev. Lett., 89 (2002) 200601; A. Pereverzev, Phys. Rev. E, 68 (2003) 056124; J. S. Wang and B. Li, Phys. Rev. Lett., 92 (2004) 074302; Phys. Rev. E, 70 (2004) 021204.

[112] B. Li and J. Wang, Phys. Rev. Lett., 91 (2003) 044301; 92 (2003) 089402; B. Li, J. Wang, L. Wang and G. Zhang, Chaos, 15 (2005) 015121.

[113] S. Nose, J. Chem. Phys., 81 (1984) 511; W. G. Hoover, Phys. Rev. A, 31 (1985) 1695.

[114] E. T. Swartz and R. O. Pohl, Rev. Mod. Phys., 61 (1989) 605.

[115] S. Lepri, R. Livi and A. Politi, Phys. Rep., 377 (2003) 1.

[116] C. Maes, K. Netocny and M. Verschuere, J. Stat. Phys., 111 (2003) 1219.

[117] J.-P. Eckmann and E. Zabey, J. Stat. Phys., 114 (2004) 515.

第九章　一些生命网络的研究

十年来,各种领域的科学工作者进行了大量的实际复杂系统的网络描述及其实证统计的研究。涉及的领域之多,内容之丰富,使得本书不太可能给一个全面综述。最近,考斯塔等人以预印件形式发表了题为"Analyzing and Modeling Real-World Phenomena with Complex Networks: A Survey of Applications"的综述长文[1],长达96页,列举了499篇报道实际复杂系统的网络描述及其实证统计的论文,涉及50个大小科学领域。然而,在我们看来,还漏掉了一些重要领域和重要论文。

本书中只能简单介绍两个领域的网络实证研究,一个是本章介绍的生命网络,另一个是下一章介绍的合作与竞争网络。即使对这两个领域,我们的介绍也只能涉及其中很小的一部分。考斯塔等人的综述长文也许可以为有兴趣于这个研究方向的读者提供一些指引。

9.1　大脑功能网络

一般认为:脑是进行思维、产生情感和欲念以及进行学习和记忆的机体。因此人们要对这个神秘的机体进行研究,其成果之一便是大脑神经网。大脑神经网络系统是大量的、同时也是很简单的处理单元(或称神经元)广泛地互相连接而成的复杂网络系统,是一个高度复杂的非线性动力学系统。虽然从整个网络看来,每个神经元的结构和功能相对简单,但由大量神经元构成的网络系统的行为却是十分复杂的。在神经网络中发生的动力学过程有两类:一类称之为快过程;另一类称之为慢过程。所谓快过程,即是神经网络的计算过程,它是神经网络的活跃状态的模式变换过程。神经网络只有通过学习才能逐步具有模式变换的能力,神经网络的学习过程即为慢过程。

据估计,人脑大约包含有1.4×10^{11}个神经元,每个神经元与大约$10^3\sim10^5$个其他神经元相连接,构成一个极为庞大而复杂的网络。神经元在结构上由细胞体、树突、轴突和突触四部分组成,见图9.1[2,3]。

在生物神经元中,突触为输入输出接口,每个神经元大约有$10^3\sim10^5$个突触。树突和细胞体为输入端,接受突触点的输入信号。细胞体是由细胞核、细胞质和细胞膜所组成的,位于细胞体内部及其周围的元素有钠离子、钙离子、钾离子和氯离子等,其中钾离子大部分位于细胞体内,而钠离子大部分在细胞体外。

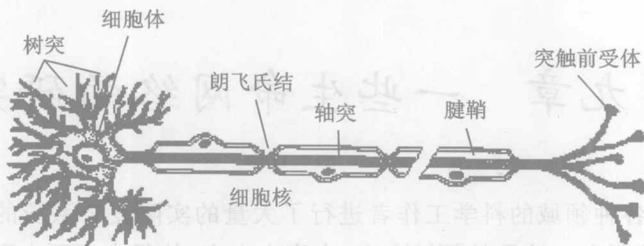


图 9.1　神经元或神经细胞的结构

（引自 http://imgsrc. baidu. com/baike/pic/item/b13fd4804ece24c49023d92e. jpg）

当细胞体外的钠离子扩散到细胞体内时，它会引起细胞膜电位的增加，这就是所谓的激励作用；当细胞体内的钾离子扩散到细胞体外时，它会引起细胞膜电位的下降，这就是所谓的抑制作用。因此细胞体相当于一个微型处理器，对各树突和细胞体各部位收到的来自其他神经元的输入信号进行组合，并在一定条件下触发，产生一个输出信号；输出信号沿轴突传至末梢，轴突末梢作为输出端通过突触将这一输出信号传向其他神经元的树突和细胞体，如图 9.2 所示。

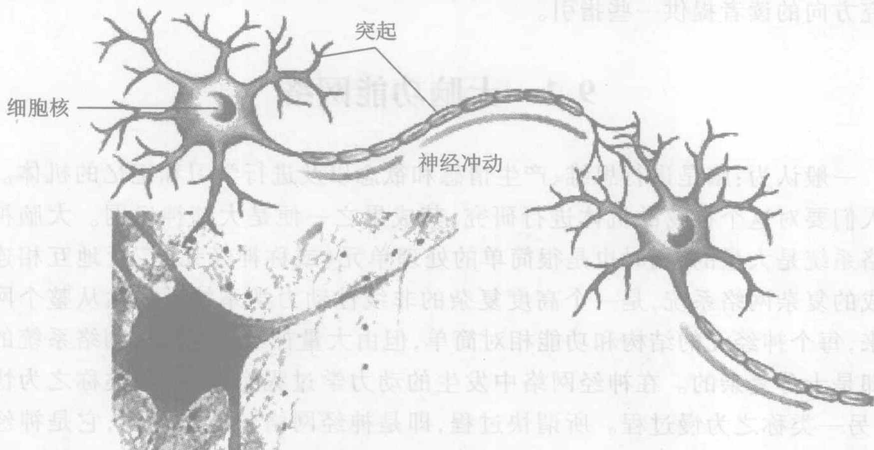


图 9.2　神经元之间发生连接的示意图

（引自 http://www. bioguider. com:80/Photo/UploadPhotos/2005 - 3/2005325215640281. jpg）

大脑中的神经元通过突触互相连接，形成了复杂的神经网络系统，实现人类的各种智能行为。大脑可以粗分为左脑与右脑。左脑主要完成抽象思维，右脑主要完成形象思维。大脑还可以进一步细分为 52 个区，每个区都完成各自特定的功能[2]，如视觉、听觉、嗅觉、触觉及味觉等。在每个功能区中，又包含有许多神经元群，每个神经元群完成相应功能区的特定功能。在大脑神经系统中，约有

300万个神经元群,每个神经元群由30~1000个神经元组成,各神经元之间通过突触连接,形成高度复杂的神经网络。受外界刺激而产生的兴奋过程和抑制过程使得各神经元之间、神经系统各部分之间的神经活动能够互相配合、互相协调地进行,实现各种智能行为。

在这个图像里,可认为神经通讯是由神经元发出信号到突触,然后到所有与其物理相连的神经元。收到信号的神经元就会将从所有邻居得到的信号结合起来。即除了物理连接外,没有进一步的通讯结构。然而,认知功能需要脑对信号的自适应,即需要物理结构之上的可变有效通讯结构。我们目前对这个层面的认识还不是很充分。现有的观点认为,神经通讯为一种神经关联机制。两个神经元群间的通讯依赖于它们之间的关联。缺乏关联神经就无法通讯[4]。神经关联表现为各种脑活动的同步化,因此脑活动的各种观测实验可由广泛的时空尺度的同步化现象来描述。在任意瞬间,我们脑中的许多神经元群都是激活的[4],激活群间相互作用与通讯就引起我们的认知动力学。激活的神经群振荡并经历节律可激发涨落,产生通讯的含时窗口。只有关联振荡的神经群可以有效地相互作用,因为它们的输入与数出通讯窗口会同时打开。

研究有效通讯结构与神经网络上的动力学有助于我们明白大脑与认知功能间的关系。在神经网络内,大量神经元的非线性动力学导致一些统计依赖的斑图(功能连接)与因果作用(有效连接),定义了复杂脑网的三种主要描述[5]:神经连接,功能连接与有效连接。神经连接是一套物理或结构的连接,其数据可覆盖多种空间尺度,从局部回路到区间间的大规模网。神经网络连接斑图在短时间内相对静止,但长时间(如学习期间)内可以变化。这种变化改变了连接的权重。功能连接则抓住了空间距离较远的神经单元之间的关联性,量度它们之间的谱关联或锁相。功能连接依赖于时间(几百 ms),为自由模式("model-free"),量度没有明显的因果效应的统计独立性。测量脑活动的不同方法通常导致不同的功能连接统计估值[6]。有效连接描述一个神经系统对另一个的因果效应[7]。因此不同于功能连接。有效连接不是自由模式的,需要包括结构参数的因果模式说明。实验上,有效连接可通过微扰或神经事件含时序的观察来推断。

功能与有效连接依赖于时间。脑的各不同区域的统计意义上的相互作用迅速变化,反应在不同的认知任务中就是参与的脑区域与路径的变化[5],以及与学习有关的结构变化。重要的是,结构、功能与有效连接是相互关联的。结构连接是各种功能与有效连接斑图的主要限制。后者可在网络中产生。给定皮层区域的结构输入与输出为功能特点的主要确定者;相反,功能相互作用可以对神经连接形状有贡献。要么直接通过活动突触修改,要么经过长时间通过影响器官的接收、认知或行为能力来修改。

神经网络的研究已取得丰硕的成果,同时人工神经网络理论也有了长足的进步。然而功能网络的研究才刚刚起步,仅取得了一些初步的结果。如何定量探测功能与有效连接?爱桂耳兹(Eguiluz)等最近给出了一种用功能磁共振成像仪(fMRI)提取功能网结构的方法[8],如图 9.3 所示。在这些实验中,每一步在 $36 \times 64 \times 64$ 个脑位置测量磁共振脑活动,称为像素。图 9.3 中顶部的四个图代表活动的四个瞬间。像素 x 的活动在时间 t 记为 $V(x,t)$,图 9.3 中第二行的三个时间序列分别代表从视角(V1),运动神经(M1)及后脑(PP)皮层选择的像素随时间的变化。定义任一对像素 x_1 与 x_2 的线性关联系数为

$$r(x_1,x_2)=\frac{<V(x_1,t)V(x_2,t)>-<V(x_1,t)><V(x_2,t)>}{\sigma(V(x_1))\sigma(V(x_2))}, \tag{9.1}$$

其中 $\sigma^2(V(x)) = <V^2(x,t)> - <V(x,t)>^2$,$<\cdot>$ 代表时间平均。按此方式就可以得到大脑中各不同区域神经元群间的关联矩阵。功能连接则定义为两个像素的时间关联超过某一正的域值 r_c 的点对,即不管它们是否为神经连接的,只要满足 $r(x_1,x_2) > r_c$,就定义 x_1 与 x_2 间有一条功能连接。图 9.3 中第三行显示对应第二行的关联矩阵及将 $r(x_1,x_2) > r_c$ 的连接过滤掉后的域值关联矩阵,

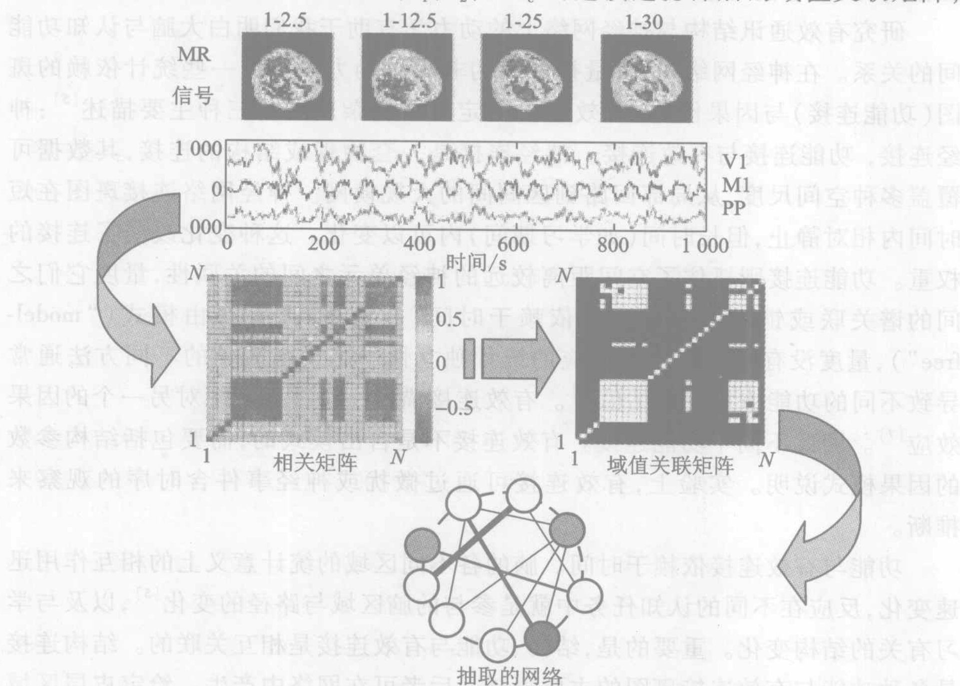


图 9.3　从 fMRI 数据中抽取功能网的方法(引自文献[8])

先计算关联矩阵,然后定义较高关联节点间的连接。顶部的四个图代表活动的快照,三个时间序列代表从视角(V1),运动神经(M1)及后脑(PP)皮层选择的像素

即功能连接。图 9.3 中最后一行显示域值关联矩阵对应的功能网络结构。

图 9.3 描述用此种方法得到任意给定任务中的功能网。爱桂耳兹等发现用这种方法给出的功能网,其度分布为幂率分布,且其集群系数远大于其对应的随机网[8]。当用较大的域值 r_c 时,这个幂率分布更明显。他们考察了不同的脑活动,如听音乐和敲手指头等,发现它们都是幂率分布。图 9.4 则为所构造出的真实功能网。最近,Zhou 等研究了猫脑皮层连接的功能网,也揭示了其中的层次结构[9,10]。

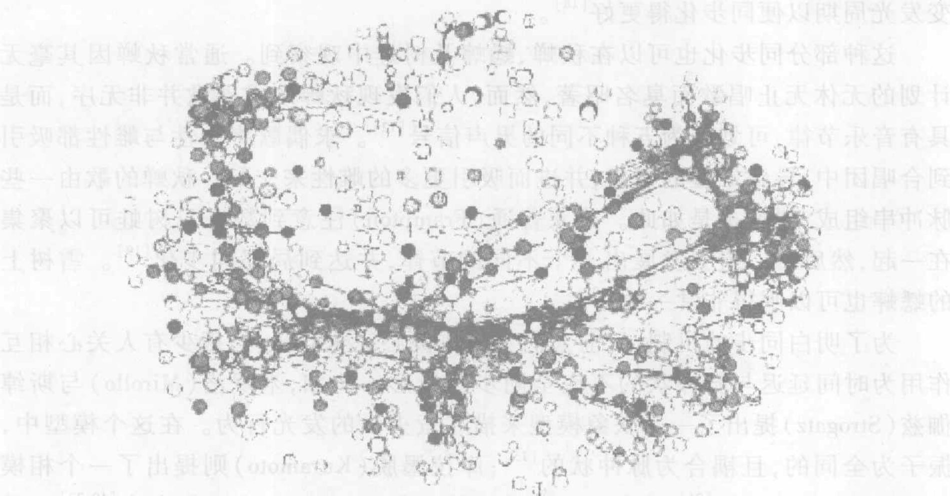


图 9.4 从 fMRI 数据中得到的脑功能网(引自文献[5])

9.2 两态小动物群体网络

两态昆虫(如萤火虫、秋蝉、蟋蟀,甚至树蛙等)的集体行为已被注意了很长时间[11,12]。之所以称为两态,是指从一个研究角度,它们的行为可以分为相反的两类,例如发光与不发光,鸣叫与沉寂等。其中萤火虫被研究得最为广泛。世界上有各种萤火虫,分布在不同的地方,如印度、马来西亚、泰国、菲律宾、中国及美国等。现已发现一些种类的萤火虫可在特定的条件下发生同步化,最著名的为东南亚的萤火虫。这些萤火虫成堆地聚集在树上,且雄性以相同的节律发光。即一些种类的所有萤火虫按 2s 发 3 次光的速率达到完美的一致性。另一些种类的发光周期可达到 3s。在两次发光期间,树林是完全黑暗的,而它们发光时树林被奇异地照明,构成自然的奇观[13-16]。我们将这种完美的一致性叫完全同步化。而在某些地方,萤火虫可能只表现出部分同步化[11]。事实上,各种不同的萤火虫可显示各种不同的同步化类型[17]。对部分同步化的一种可能的解释

是:这些种类的萤火虫对光不太敏感,或受到了其他因素的影响。

萤火虫间的通讯是通过发光来实现的。当萤火虫收到周围其他个体发的光时,它可以利用这个信息来重新设置自己的时钟,以便同邻居们同步。实验已经证实:用光或电来刺激萤火虫的眼睛,可以让它的光器官发光[16]。人们相信,当一只萤火虫看到另一只发光时,它就会减慢或加速以便同时发光。比如当Pteroptyx cribellata萤火虫(新几内亚的一种多孔卷翼萤)达到"相同步"时,其发光间隔是固定的;而Pteroptyx malaccae萤火虫(泰国境内的一种卷翼萤)则能改变发光周期以便同步化得更好[18]。

这种部分同步化也可以在秋蝉、蟋蟀及树蛙中观察到。通常秋蝉因其毫无计划的无休无止唱歌而臭名昭著,然而,人们发现秋蝉的求偶歌并非无序,而是具有音乐节律,可划分为五种不同的男声信号[12]。求偶歌将雄性与雌性都吸引到合唱团中,导致雄性的聚集,并进而吸引更多的雌性来交配。秋蝉的歌由一些脉冲串组成,树蛙也是如此。弗莱普通(Frampton)注意到数百只树蛙可以聚集在一起,然后每一组会发展出一个不同的节律,并达到局部同步化[19]。雪树上的蟋蟀也可以唱得非常一致[20]。

为了明白同步的机制,目前人们主要在关心完全同步化,很少有人关心相互作用为时间延迟与脉冲状的不完全同步化情形。比如,米罗洛(Mirollo)与斯绰伽兹(Strogatz)提出了一个映象模型来描述萤火虫的发光行为。在这个模型中,振子为全同的,且耦合为脉冲状的[15];库拉墨脱(Kuramoto)则提出了一个相模型,其耦合为平均场[21]。利用这些模型的思想已经造出了电萤火虫[19,22]。最近,同步化研究在非线性科学与复杂网络中得到了长足的发展。对两个耦合振子,可实现广义同步化、相同步化、延迟同步化及完全同步化等[23];对大量的振子则可导致集团行为[24,25]。此外,网络上的振子同步化也是可能的[26]。这些结果为我们进一步明白部分同步化奠定了基础,但是,当我们关心大量两态昆虫在它们的生物信号联系网络上的行为时,这些模型却没有一个能够描述两态小动物所表现的行为。

为了给两态小动物的集体行为建模,我们需要首先找到它们的共同点与不同点[27]。

共同点有:(1)所有这些小动物都有两种状态:发光与不发光,或者鸣叫与沉寂。(2)当它们通过鸣叫交换信息时,它们间的相互作用为脉冲式,因此它们间的耦合可考虑为脉冲耦合。(3)从鸣叫中收到的信号强度随发射者与接收者间的距离的增加而衰减。一个合理的假设是耦合强度随距离成反比。(4)当一组振子表现为同步化时,各个振子仍可以具有自己的某些行为。为了实现这些特点,我们可以用非全同振子来描述各个个体,并让网络具有群落结构[28,29]。

不同点有:(1)当萤火虫在飞时,它们将更加注意飞行本身,因而降低了对

其他发光信号的敏感性。我们假定这种非敏感性可被处理为某种对信号的时间延迟。(2)萤火虫用光信号进行通讯,速度快;而秋蝉、蟋蟀与树蛙用声信号进行联络,速度较慢。因此,声信号交流的时间延迟是距离的函数。将(1)与(2)结合起来,可通过将时间延迟引入耦合来实现对不同种生物的不同行为的描述。例如,有了时间延迟考虑后,飞行的萤火虫就可化为具有延迟的静态萤火虫。

根据以上分析,我们来构建两态小动物的网络模型。节点代表秋蝉等小动物,连线代表它们之间的相互作用。群落特点由一棵棵树来描述,每棵树的各个树枝上停留的个体构成一个群落,整个网络为随机种植的树构成的森林。具体来说,我们的网络模型可按如下方式构造:

1. 取一个边长 L 为整数的正方形,将它分成 L^2 个格子。各个个体就停留在那些格子的交点上。在随机选取的 N_0 个交点上放 N_0 棵树,每棵数拥有的面积为 $l\times l$,这里 l 需满足 $N_0l^2<L^2$。取周期边界条件。

2. 随机从 $[l,m_0]$ 中选取一个数 m 作为一棵树上的个体数,并从一棵树的 l^2 个交点中为每个个体随机选一个位子。如果那个位子已被占据,则重选一个新的。按此方式,每棵树可以有不同的个体数且它们的位子不同。我们将有个体的交叉点叫节点,则网络的总节点数 N_1 就正比于树的数量 N_0。

3. 当一个个体鸣叫时,周围的个体就会收到信息。假定信息的强度按与距离成反比的方式衰减,就等价于让较长距离间的连线密度小于较短距离的连线密度。这个技巧将相空间转换成网络结构。具体地,我们先选一个节点 i 作为鸣叫者,一个节点 j 作为接收信号者,并按概率 $p=1/d_{ij}$ 给它们之间加一条连线,其中 d_{ij} 为节点 i 与 j 间的距离。然后我们将 j 改为其他节点,做同样的事。按此方式,我们得到节点 i 与其他节点间的所有外向连线。当 i 从 1 变到 N_1 时,外向连线的网络就形成了。这个网也可以当作内向连线的网,所有内向连线可以通过外向连线重新组织而成。例如,节点 i 的内向连线是那些终止在 i 的其他节点的外向连接。内向连接是导致集体行为的直接原因。图 9.5 给出了三棵树的网络示意图,其中“圆圈”代表节点,虚线代表连边。

4. 取节点 i 为如下的两态振子[30]

$$\begin{aligned} x_{n+1}(i) &= f(x_n(i),y_n(i)),\\ y_{n+1}(i) &= y_n(i)-\mu(x_n(i)+1)+\mu\sigma, \end{aligned} \tag{9.2}$$

其中参数 $\mu\ll 1$,n 代表时间,$x(i)$ 为快变量,$y(i)$ 为慢变量,$f(x,y)$ 为如下形式的非线性非连续函数

$$f(x(i),y(i))=\begin{cases} y(i)+\alpha(i)/(1-x(i)), & x(i)\leqslant 0,\\ y(i)+\alpha(i), & 0<x(i)<y(i)+\alpha(i),\\ -1, & x(i)\geqslant y(i)+\alpha(i), \end{cases} \tag{9.3}$$

其中参数 $\alpha(i)$ 描述个体间的区别,如种类、年龄、大小及强壮程度等。当 $\alpha(i)$ 取

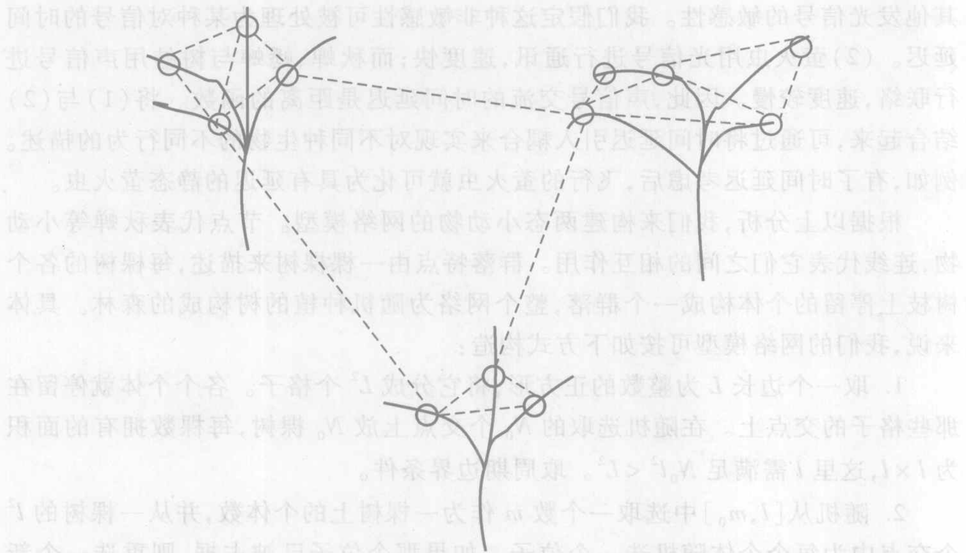


图 9.5 小动物鸣叫网的示意图(引自文献[27])

值在 4.0 与 4.5 之间时,方程(9.2)显示两态行为[30]。

5. 假定个体只有在鸣叫状态时才发送信息,在沉寂状态时才接收信息,相互作用就应该为脉冲式耦合。不同种类对信号的不同敏感度可以用耦合强度 k 来描述。考虑到鸣叫信号需要时间传递到各节点,耦合应包含延迟,网络模型可以写为

$$x_{n+1}(i) = f(x_n(i), y_n(i)) + k[1-\delta(i,n)]\sum_{j\in S(i)}\delta(j, n-\tau(d_{ij})),$$
$$y_{n+1}(i) = y_n(i) - \mu(x_n(i)+1) + \mu\sigma, \quad i = 1, 2, \cdots, N_1, \tag{9.4}$$

其中 $\delta(i,n)$ 当 $x_n \geqslant x_0$ 时为 1,其他情况时为 0,x_0 为鸣叫的域值。$S(i)$ 代表连到 i 的节点,$\tau(d_{ij})$ 为由距离 d_{ij} 决定的时间延迟,$\sum_{j\in S(i)}\delta(j,n-\tau(d_{ij}))$ 描述收到的信息,而$[1-\delta(i,n)]$用于判断 $x_n(i)$ 的状态是否为鸣叫态。为方便起见,我们取 $d_{ij}<d_0$ 时 $\tau(d_{ij})=0$,$d_0\leqslant d_{ij}<2d_0$ 时 $\tau(d_{ij})=1$,$2d_0\leqslant d_{ij}<3d_0$ 时 $\tau(d_{ij})=2$ 等,这里 d_0 由个体的种类决定。即当距离 d_{ij} 小于域值 d_0 时,延迟为零,然后随 d_0 的倍数正比增加。当所有的 d_0 为零时,此模型描述东南亚的萤火虫情形;而当 d_0 为非零时,此模型描述其他情形。

现在我们用数值模拟来显示方程(9.4)所描述的集体行为,首先考虑耦合项中没有时间延迟的情形。由于振子为非全同的(不同的 $\alpha(i)$),方程(9.4)无法显示完全同步。我们只能期望一种类似相同步的鸣叫同步化(firing synchronization)的出现[27],即不同的振子同时鸣叫。图 9.6 给出了两个不同振

子间的一个典型鸣叫同步。比较图 9.6(a)与(b),可见它们鸣叫的爆发总是发生在相同的时间间隔内。

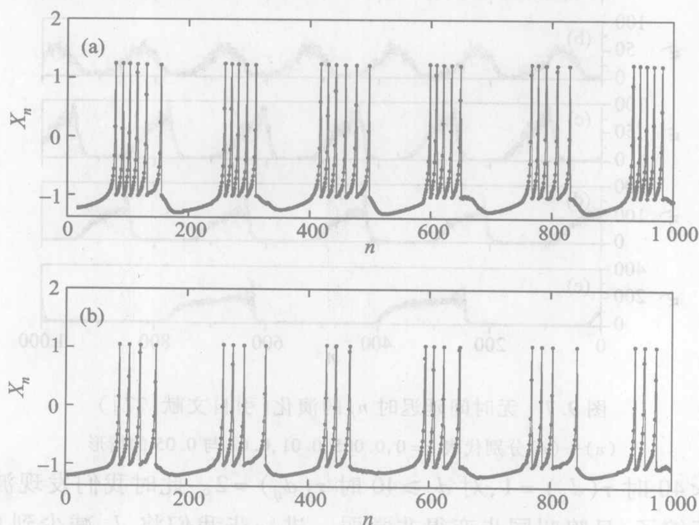


图 9.6 两个不同振子间的一个典型的相同步化

然后我们考察网络上的鸣叫同步,此时由于大量振子间的相互作用,其行为将会与两个振子的情形完全不同。认为 $x_n \geqslant x_0$ 的状态为鸣叫态,并让 n_f 表示时间 n 时处于鸣叫态的数目,则 n_f 随时间的变化就反应鸣叫同步的程度。如果大多数振子同时鸣叫或沉寂,则系统为鸣叫同步化;否则,为非鸣叫同步。数值模拟显示出当耦合强度 $k=0$ 时,n_f 为非鸣叫同步态;然后随着 k 的增加,n_f 逐渐变为一种波状的行为。当 k 进一步增加时,波的周期就会变得越来越长。图 9.7 给出了数值结果,其中参数为 $N_0=100$,$\alpha(i)\in[4.0,4.5]$,$\mu=0.001$,$\sigma=0.1$,$L=120$,$l=10$ 及 $m_0=10$,(a)—(e)分别代表 $k=0$, 0.005, 0.01, 0.02 与 0.05 的情形。很容易看出,图 9.7(a)为围绕平均值 20 涨落的随机时间序列,表明 $k=0$ 时没有鸣叫同步。从图 9.7(b)可看出 n_f 变成了一种波状的行为,表明鸣叫同步已经出现。然后从图 9.7(c)、(d)与(e),可见波峰的幅值变得越来越高,波的周期变得越来越长,表明耦合强度 k 的增加使得鸣叫同步的程度越来越强。

现在我们来看有时间延迟的情形。此时首先需要确定 $\tau(d_{ij})$,其关键是定出 d_0。我们发现不同的 d_0 将给出不同的集体行为。取 $k=0.01$ 的情形作为例子,当 $d_0=0.5L$ 或 $\tau(d_{ij})=0$ 时,系统为鸣叫同步,如图 9.7(c)所示。现考虑 $d_0=0.5L/2$ 的情形,由于 d_{ij}的最大距离为 $L/2=60$,我们得到当 $d_{ij}<30$ 时 $\tau(d_{ij})=0$ 与 $d_{ij}\geqslant 30$ 时 $\tau(d_{ij})=1$。我们发现 n_f 与 n 之间的关系仍然为波状的,只是波峰的高度变短了。然后我们将 d_0 减少到 $0.5L/3$,即对于 $d_{ij}<20$ 时 $\tau(d_{ij})=0$,

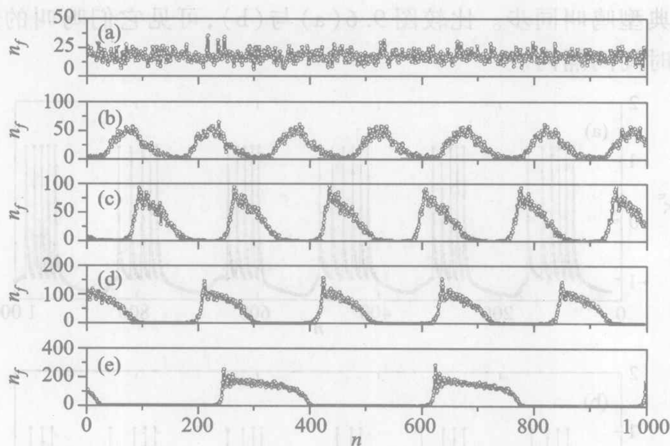


图 9.7 无时间延迟时 n_f 的演化(引自文献[27])

(a)—(e)分别代表 $k=0,0.005,0.01,0.02$ 与 0.05 的情形

对 $20\leqslant d_{ij}<40$ 时 $\tau(d_{ij})=1$,对 $d_{ij}\geqslant 40$ 时 $\tau(d_{ij})=2$。此时我们发现波峰的高度被极大的压缩了,且鸣叫同步变得非常弱。进一步我们将 d_0 减少到 $0.5L/4$,即对于 $d_{ij}<15$ 时 $\tau(d_{ij})=0$,对 $15\leqslant d_{ij}<30$ 时 $\tau(d_{ij})=1$,对 $30\leqslant d_{ij}<45$ 时 $\tau(d_{ij})=2$,对 $d_{ij}\geqslant 45$ 时 $\tau(d_{ij})=3$。此时波状行为变的模糊,鸣叫同步消失。图 9.8 为数值模拟结果,其中(a)代表 $\tau(d_{ij})=0$ 或 $d_0=0.5L=60$ 的情形,(b)代表 $d_0=30$ 的情形,(c)代表 $d_0=20$ 的情形,(d)代表 $d_0=15$ 的情形。可见时间延迟在鸣叫同步化中起负面作用,时间延迟越多,则对鸣叫同步破坏的越厉害。此时很难观察到鸣叫同步化。这点可以这样理解:从距离 d_0 内的节点处获得的信号要

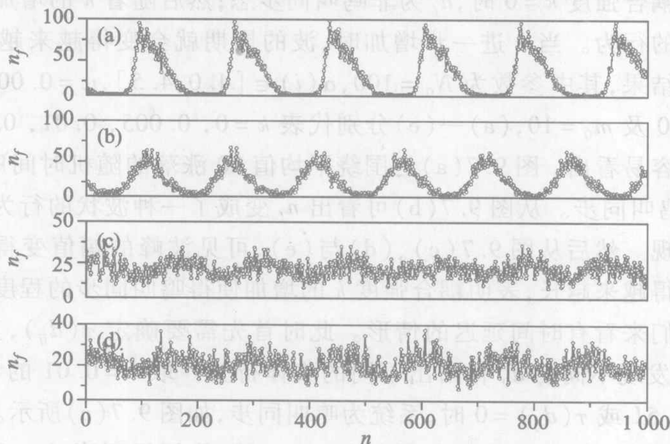


图 9.8 有时间延迟时 n_f 的演化(引自文献[27])

其中 $k=0.01$,(a)—(d)分别代表 $d_0=0.5L,\ 0.5L/2,\ 0.5L/3$ 与 $0.5L/4$ 的情形

求它与目前的状态同步，而从距离在 d_0 与 $2d_0$ 间的节点处得到的信息要求它与前一时刻的状态同步，依此类推等。这些相互矛盾的信息使得节点处在无序的状态，即破坏了同步。

一个非常有趣的现象是：不管是否有时间延迟，处在同一棵树上的个体总是容易表现出局部鸣叫同步化。其原因如下：由于 d_0 通常大于树的半径 d_0，处在同一棵树上的节点间的相互作用没有时间延迟，因此它们很容易在同一时间鸣叫。没有时间延迟时，这个局部鸣叫同步化将扩散到整个网络，并导致一种全局性的鸣叫同步。然而当有时间延迟时，不同的树将会有不同的局部鸣叫同步，这个差异使得整体的同步难以出现。图 9.9 给出了四棵典型的树上的局部同步化，其中(a)—(d)代表没有延迟的情形，(e)—(h)代表延迟 $d_0=15$ 的情形。比较图 9.9 左边与右边的子图，可见一个明显的区别是左边的鸣叫爆发在相同的时间间隔内，而右边的却是无序。另一个区别是左边的斑图是相似的，而右边的却不同。当然，图 9.9 的左边与右边也有共同的特征：每一个子图中的 n_f（细线）具有相同的值，表明一棵树上局部鸣叫同步化。由于 n_f 为时间 n 时鸣叫的节点数，n_f 不随时间变化就表明一棵树上的所有节点同时鸣叫与沉寂。

不同的两态小动物具有不同程度的鸣叫同步。这种部分同步可以被感觉出

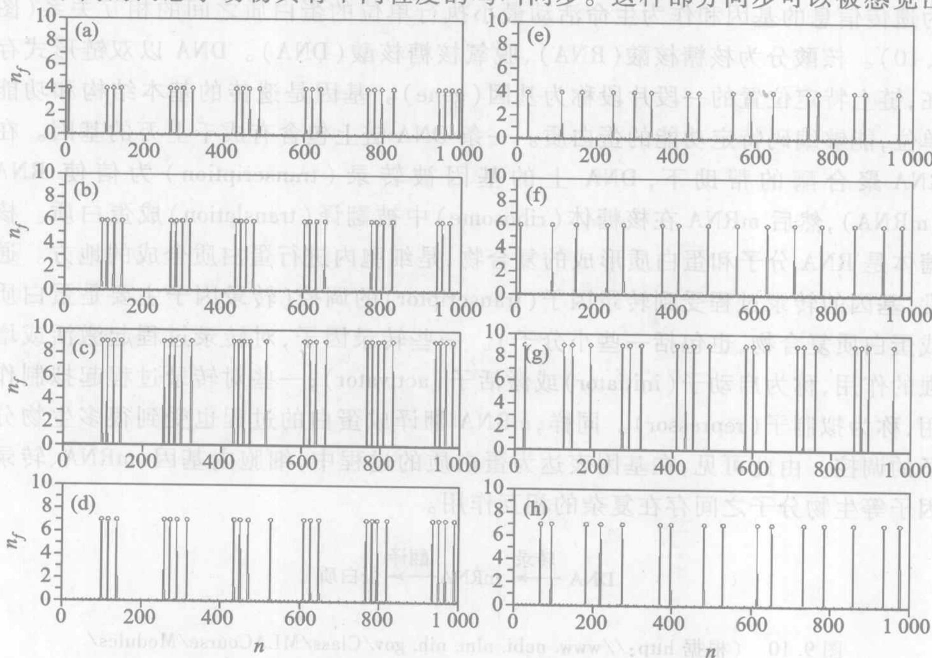


图 9.9 n_f 在四棵典型的树上的演化

其中 $k=0.01$，(a)—(d)代表没有延迟的情形，(e)—(h)代表延迟 $d_0=15$ 的情形

来,但其质量没有完全同步那样高。这就解释了实际情况中我们能观察到的是部分同步。考虑时间延迟效应后,这个模型可以显示完全同步、部分同步及局部同步。

9.3 生物分子网络

9.3.1 生物分子网络

生命活动的物质基础包括四种类型的生物大分子:核酸、蛋白质、多糖以及某些类型的脂类。其中多糖和脂类是主要的能量储藏物质,它们在分解过程中释放的化学能是生命活动的能量来源;由核酸构成的染色体是基因等遗传信息的载体,生命的生长和发育都受到遗传信息的调控;蛋白质是基因表达的产物,是实现各种生物功能的主要执行单位。要深入理解生命活动的基本规律,首先需要了解生命活动所必需的能量和物质是如何获得的。这是生物化学关于代谢通道(biological pathway)研究的主要内容;进一步,还必须了解遗传信息在生命活动过程中是如何发挥作用的。生物学的中心法则(central dogma)就描述了作为遗传信息的基因和作为生命活动最小执行单位的蛋白质之间的相互关系(图9.10)。核酸分为核糖核酸(RNA)、脱氧核糖核酸(DNA)。DNA 以双链形式存在,链上特定位置的一段片段称为基因(gene)。基因是遗传的基本结构和功能单位,能够编码特定功能的蛋白质。一条 DNA 链上包含有成千上万的基因。在 RNA 聚合酶的帮助下,DNA 上的基因被转录(transcription)为信使 RNA(mRNA),然后 mRNA 在核糖体(ribosome)中被翻译(translation)成蛋白质。核糖体是 RNA 分子和蛋白质形成的复合物,是细胞内进行蛋白质合成的地方。通常,基因的转录过程受到转录因子(transcriptor)的调控(转录因子主要是蛋白质或蛋白质复合物,也包括一些小分子)。一些转录因子,对转录过程起激活或增强的作用,称为启动子(initiator)或激活子(activator);一些对转录过程起拟制作用,称为拟制子(repressor)。同样,mRNA 翻译成蛋白的过程也受到很多生物分子的调控。由此可见,在基因表达为蛋白质的过程中,细胞内基因、mRNA、转录因子等生物分子之间存在复杂的相互作用。



图 9.10 (根据 http://www.ncbi.nlm.nih.gov/Class/MLACourse/Modules/MolBioReview/central_dogma.html 改画的)中心法则(更一般的中心法则参见 http://en.wikipedia.org/wiki/Central_dogma_of_molecular_biology)

长期以来,生物学研究主要集中在各种生物大分子个体的结构和功能上。人们希望通过对生物大分子的深入研究达到对生命活动的深入理解。但是随着研究的深入,人们认识到,复杂的生物功能和生命现象,是各种生物基本组成单元之间复杂相互作用的结果,而不能简单地归结为生物分子个体的结构和功能。哈特维尔(Hartwell)[31]等人1999年在Nature杂志上发表文章指出,现代生物学面临的一个尤其重要的挑战,是发展新的研究方法,不仅研究构成细胞的各种生物分子的结构和功能,而且研究这些生物分子之间的相互作用,以及生命功能是如何通过各种生物分子的相互作用实现的。理解这些问题,就必须深入研究各种生物分子通过相互作用关系形成的网络结构,以及网络的动力学行为。

9.3.2 代谢网络

生命活动所需要的能量是在生物大分子的分解过程中产生的,例如葡萄糖在一系列的化学反应过程中,被分解为小分子,同时释放能量。另一方面,很多生物功能的实现,都直接或间接地依赖于把简单的生物分子合成为复杂的复合物。生物学把这些包含能量和物质转化的化学反应称为新陈代谢(metabolism),参与反应的分子称为代谢物(metabolite)。新陈代谢是所有生命活动的基础。细胞内发生的代谢反应,都是在酶(enzyme)的催化和调节下进行的。因此,新陈代谢过程中,除了参与反应的代谢物之间发生的相互作用外,还包括酶的催化作用。大多数酶都是某种形式的蛋白质或者多个蛋白质的复合物。

目前公开的比较全面的关于生物新陈代谢的数据库包括KEGG[32]和Biocyc[33]。它们都系统地整理了很多物种的代谢通道(pathway)、通道中的各个化学反应、参与催化反应的酶等信息。这些数据是代谢网络研究中用来构造代谢网络的基础。

巴拉巴斯(Barabasi)课题组的郑夏雄(Jeong)[34]等人对具有代表性的43个物种的代谢网络进行了研究。在他们的网络中,节点代表代谢物,节点之间的有向边代表代谢物之间的化学反应。进入节点的边表示节点所代表的代谢物是边所代表的化学反应的产物;从节点发出的边表示节点是边所代表的化学反应的反应物。它们的研究结果显示,43个物种的代谢网络中,节点的入度分布和出度分布都呈现出无标度特征,而且网络直径表现出与网络大小无关的特性(图9.11),说明网络的小世界特性。通过其他方法构造的代谢网络(例如,节点代表代谢反应,边代表代谢反应共享代谢物)也表现出相似的特性[35-38]。

代谢网络的无标度特性,显示一些代谢物参与了非常多的代谢反应,处于网

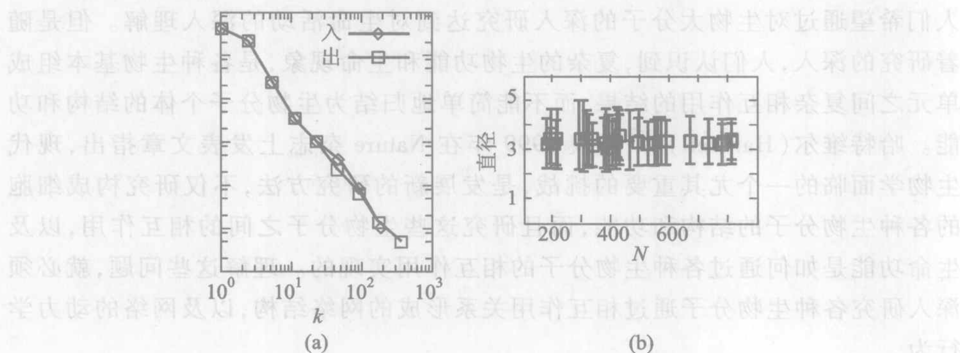


图 9.11 （引自文献[34]）

(a)对43个物种的代谢网络节点的入度分布和出度分布取平均后得到的结果；

(b)在大肠杆菌代谢网络中网络直径与网络大小的关系

络结构枢纽的地位。这些代谢物通常都对代谢反应具有关键作用，而且具有很长的进化历史。代谢网络的小世界特性使得任何两个代谢物之间具有紧密的联系，便于"生物对"对环境的变化做出快速反应。

生物的代谢反应包括一系列功能独立的代谢通道，例如氨基酸的合成代谢通道（amino acid biosynthesis）碳水化合物的代谢通道（carbohydrate metabolism）、脂类的代谢通道（lipid metabolism）、核苷酸的代谢通道（nucleotide metabolism）等。每一个通道都由一系列化学反应组成。这些反应在细胞内特定的空间和特定的化学环境下发生，完成特定的生物功能；同时通道之间又相互作用，在更高的层次上完成新的生物功能。因此细胞的代谢网络是一种分层模块结构，一个代谢通道就是一个具有独立功能的模块。目前大家比较广泛地接受巴拉巴斯等人通过一个模型说明的一个结论，即划分为层次的模块结构的特征表现为节点的集群系数（clustering coefficient）与度之间的幂律关系 $C(k) \propto k^{-p}$，其中 p 为常数[39]。巴拉巴斯课题组的拉法兹（Ravasz）等人[40]对43个物种的代谢网络进行分析，发现这些代谢网络数据遵从幂律关系 $C(k) \propto k^{-p}$，很可能说明网络的分层模块结构特征（图 9.12）。

代谢反应中的各种反应通道在自然选择过程中被保留下来，具有稳定的生物功能，在代谢网络中表现为网络模块结构的稳定性。同时模块化结构也使得生物更容易通过模块之间的合作与重组来实现新的生物功能，以适应各种生存环境。

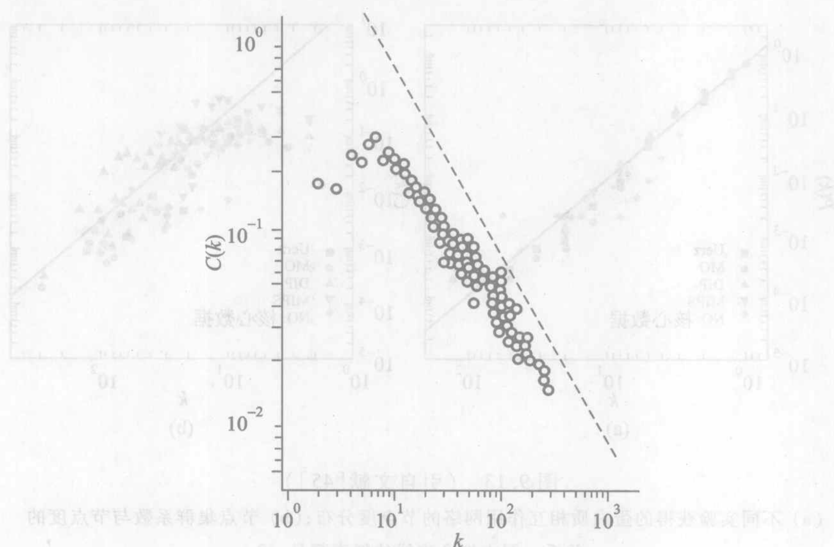


图 9.12 对 43 个物种的代谢网络节点的集群系数取平均后得到的结果(引自文献[39])

虚线表示函数 $C(k) \propto k^{-p}$

9.3.3 蛋白质相互作用网络

蛋白质之间的相互作用是很多生物功能实现的基础。在蛋白质相互作用关系的网络模型中,节点表示蛋白质,节点之间的无向边表示蛋白质之间存在物理的或生物功能上的相互作用。DIP[41]、InTact[42]、STRING[43] 等数据库中集中收录了蛋白质相互作关系数据。其中 DIP 和 InTact 数据库收集的是通过生物实验获得的关于蛋白质之间物理相互作用关系的数据;STRING 数据库不仅包括实验获得的蛋白质之间物理相互作用关系数据,而且包括通过理论研究预测的蛋白质之间的功能相互关系数据。和代谢网络相似,在蛋白质相互作用网络中,同样发现了节点度分布的无标度规律、节点间最短路径的小世界性质和网络的模块化结构等统计性质[44-47](图 9.13)。

蛋白质相互作用网络的无标度性质显示,一些蛋白质在蛋白质相互作用网络中拥有非常多的相互作用边,处于枢纽的地位;而大多数蛋白质只和少数几个固定的蛋白质发生相互作用。处于枢纽地位的节点,对网络的结构具有重要意义。对枢纽节点的破坏,通常导致网络结构的破坏。郑夏雄等人的研究发现[44,48],蛋白质的节点度与蛋白质的生物功能的重要性之间存在相关性。大多数节点度大的蛋白质,在生命活动中都具有非常重要的生物功能;节点度很小的蛋白质,只有极少数具有非常重要的生物功能。由于无标度网络中,具有比较大

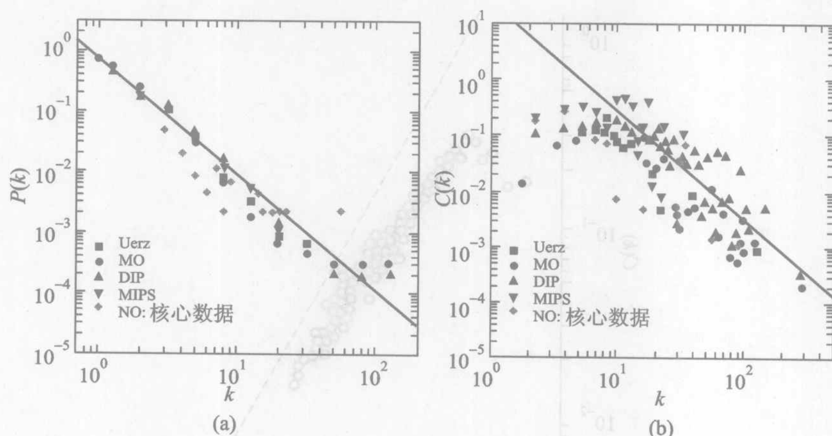


图 9.13　(引自文献[45])

(a) 不同实验获得的蛋白质相互作用网络的节点度分布；(b) 节点集群系数与节点度的关系。图中拟合直线的斜率都是 -2

节点度的节点只占网络很小一部分，因而，由于随机因素导致的破坏只有很小的概率发生在对生物具有至关重要作用的节点上。蛋白质网络结构的这种性质，使它在进化过程中具有很好的鲁棒性(robust)。

通过对蛋白质结构和序列的分析，人们发现蛋白质由蛋白域(protein domain)构成。蛋白域既是蛋白质的构成单位(building block)，也是蛋白质的进化单位(unit of evolution)，在进化过程中表现出保守性(不同物种中的同一个蛋白域，在组成蛋白域的氨基酸序列和蛋白域的功能上具有相似性)。虽然目前收录的蛋白质序列有五百多万条，但发现的各种蛋白域只有 14 755 个(Interpro 数据库[49]，2007 年 12 月 16 日)。这说明，蛋白域之间的重组构成了不同的蛋白质，并且已经知道，具有进化关系的蛋白质拥有共同的蛋白域，蛋白域相互作用关系是蛋白质相互作用关系的重要反映。通过蛋白域相互作用关系，能够预测蛋白质之间的相互作用关系。在蛋白域相互作用关系的网络模型中，网络节点表示蛋白域，节点之间的无向边表示蛋白域之间存在物理的或生物功能上的相互作用。DIMA[50] 和 DOMINE[51] 两个数据库集中收录了蛋白域相互作用关系数据，包括物理的以及预测的相互作用。对蛋白域相互作用网络结构的研究，也发现了无标度、小世界和高集群系数等统计性质[52]。

9.3.4　基因调控网络

基因表达为蛋白质的过程受到转录因子等很多生物分子的调控。在基因调控网络模型中，网络节点包括起调控作用的调控因子和被调控的目标基因，从调控因子到目标基因的有向边表示调控作用(激活基因的表达、拟制基因的表

达)。对酵母基因调控网络的研究发现[53],节点的入度分布表现为指数规律,出度分布表现为幂律。指数规律表示大多数基因受到比较少的调控因子的调控,而且它们的调控因子的数目是相似的;幂律表示极少的转录因子参与了很多基因的调控过程(图9.14)。

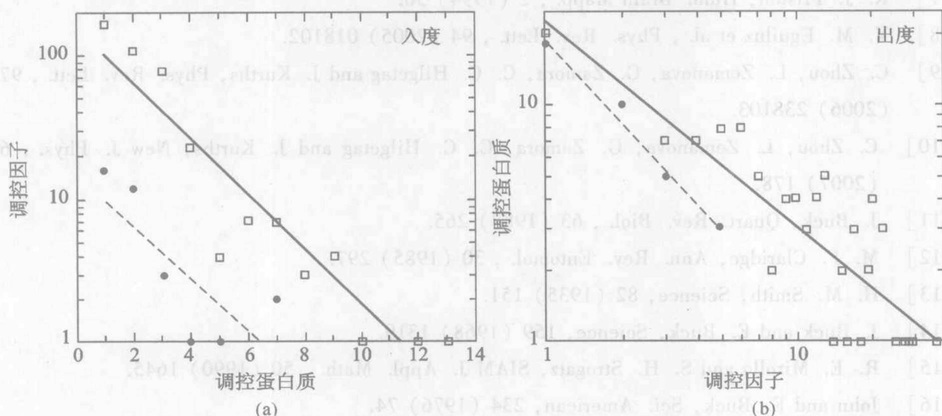


图9.14 酵母基因调控网络的节点(a)入度分布和(b)出度分布

基因的表达是随时间和环境而改变的。有些基因在生物发育的某些阶段表达,有些基因只在某些特殊的环境下才表达。这种动态现象,在基因调控网络中表现为节点和边的状态随时间和环境发生变化。网络的这种动态行为,需要根据网络节点和边的动态变化规律(例如节点所代表的调控因子的浓度随时间的变化,节点所代表的被调控基因的表达水平随时间的变化,节点之间相互作用强度随时间的变化),通过建立关于网络节点的微分方程加以描述。但是由于生命现象的复杂性,目前的生物实验大多数还处于对生命现象的定性描述阶段,缺乏足够的实验数据支持建立微分方程动力学模型。目前通常采用的方法是建立离散模型研究基因调控网络的动力学行为,其中布尔网络模型[54]受到更多关注。李方廷等人[55]采用布尔网络模型,研究了酵母的细胞周期调控网络。结果发现细胞周期调控网络的动力学行为具有很强的全局稳定性。我们在第11章中将简介布尔网络。

第九章参考文献

[1] L. da F. Costa, O. N. Oliveira Jr, G. Travieso, F. A. Rodrigues, P. R. V. Boas, L. Antiqueira, M. P. Viana and L. E. C. da Rocha, arXiv:0711.3199v2 [physics. soc - ph] 16 May 2008.

[2] 胡守仁,余少波,戴葵.神经网络导论.北京:国防科技大学出版社,1993.

[3] 韩力群.人工神经网络理论、设计及应用.北京:化学工业出版社,2002.

[4] P. Fries, TRENDS in Cogn. Sci., 9 (2005) 474.
[5] O. Sporns, D. R. Chialvo, M. Kaiser and M. Hilgetag C., TRENDS in Cogn. Sci., 8 (2004) 418.
[6] B. Horwitz, Neuroimage, 19 (2003) 466.
[7] K. J. Friston, Hum. Brain Mapp., 2 (1994) 56.
[8] V. M. Eguiluz et al., Phys. Rev. Lett., 94 (2005) 018102.
[9] C. Zhou, L. Zemanova, G. Zamora, C. C. Hilgetag and J. Kurths, Phys. Rev. Lett., 97 (2006) 238103.
[10] C. Zhou, L. Zemanova, G. Zamora, C. C. Hilgetag and J. Kurths, New J. Phys., 6 (2007) 178.
[11] J. Buck, Quart. Rev. Biol., 63 (1988) 265.
[12] M. F. Claridge, Ann. Rev. Entomol., 30 (1985) 297.
[13] H. M. Smith, Science, 82 (1935) 151.
[14] J. Buck and E. Buck, Science, 159 (1968) 1319.
[15] R. E. Mirollo and S. H. Strogatz, SIAM J. Appl. Math., 50 (1990) 1645.
[16] John and E. Buck, Sci. American, 234 (1976) 74.
[17] A. Moiseff and J. Copeland, J. Ins. Beha., 13 (2000) 597.
[18] Strogatz S H. Nonlinear Dynamics and Chaos. 1st ed. USA: Perseus Book Publishing, 2000.
[19] http://www.scienceblog.com/community/article4716.html.
[20] T. J. Walker, Science, 166 (1969) 891.
[21] Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves, and turbulence. Berlin: Springer, 1984.
[22] J. L. Guisset, J. L. Deneubourg and G. M. Ramirez Avila, Nlin. (2002) AO/0206036.
[23] Pikovsky A, Rosenblum M and Kurths J J. Synchronization——a universal concept in nonlinear science. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
[24] Z. Liu, Y. C. Lai and F. C. Hoppensteadt, Phys. Rev. E, 63 (2001) 055201.
[25] 刘宗华．混沌动力学基础及其应用．北京:高等教育出版社,2006.
[26] M. Barahona and L. Pecora, Phys. Rev. Lett., 89 (2002) 054101.
[27] Z. Liu and P. M. Hui, Physica A, 383 (2007) 714.
[28] Z. Liu and B. Hu, Europhys. Lett., 72 (2005) 315.
[29] M. E. J. Newman, Phys. Rev. Lett., 89 (2002) 208701.
[30] N. F. Rulkov, Phys. Rev. E, 65 (2002) 041922.
[31] L. H. Hartwell, J. J. Hopfield, S. Leibler and A. W. Murray, Nature, 402 (1999) 47.
[32] http://www.genome.ad.jp/kegg.
[33] http://biocyc.org/ecocyc.
[34] H. Jeong, B. Tombor, R. Albert, Z. N. Oltvai and A-L. Barabasi, Nature, 407 (2000) 651.
[35] H. Ma, A. P. Zeng, Bioinformatics, 19 (2003) 270.
[36] H. W. Ma and A. P. Zeng, Bioinformatics, 19 (2003) 1423.

[37] M. Arita, Proc. Natl. Acad. Sci. USA,101 (2004) 1543.

[38] R. Tanaka, Phys. Rev. Lett. , 94 (2005) 168101.

[39] A-L. Barabasi, Z. N. Oltvai, Nature Reviews Genetics, 5 (2004) 101 – 113.

[40] E. Ravasz, A. L. Somera, D. A. Mongru, Z. N. Oltvai and A-L. Barabasi, Science,297 (2002) 1551.

[41] http://dip. doe – mbi. ucla. edu/.

[42] http://www. ebi. ac. uk/intact/.

[43] http://string. embl. de/.

[44] H. Jeong, S. P. Mason, A-L. Barabasi and Z. N. Oltvai, Nature, 411 (2001) 41.

[45] S. -H. Yook, Z. N. Oltvai and A-L. Barabasi, Proteomics,4 (2004) 928.

[46] A. Wagner, Mol. Biol. Evol. ,18 (2001) 1283.

[47] L. E. A. Giot, Science, 302 (2003) 1727.

[48] R. Albert, H. Jeong and A-L. Barabasi, Nature, 406(2000) 378.

[49] http://www. ebi. ac. uk/interpro/.

[50] P. Pagel, M. Oesterheld, V. Stümpflen and D. Frishman, Bioinformatics, 22(8) (2006) 997.

[51] B. Raghavachari, A. Tasneem, T. Przytycka and R. Jothi, Nucleic Acids Research, (2007).

[52] S. Wuchty, Mol. Biol. Evol. , 18 (2001) 1694.

[53] N. Guelzim, S. Bottani, P. Bourgine and F. Kepes, Nature Genetics, 31 (2002) 60.

[54] S. A. Kauffman, J. Theor. Biol. , 22 (1969) 437.

[55] F. Li, T. Long, Y. Lu, Q. Ouyang and C. Tang, PNAS, 101(14) (2004) 4781.

第十章 合作网络与合作-竞争网络

10.1 简　　介

第9章简介了几种生物网络,作为使用复杂网络工具描述一类复杂系统的例子。有生命的系统,尤其是其中最高级的生物——人,应该是最复杂的系统,其中包含种类非常多的基本单元,以及它们之间的各类型相互作用。这些相互作用的关系错综复杂,即使进行网络描述也非常困难。第9章介绍了目前的做法是暂时选取一类基本单元,只研究它们之间的相互作用,这样构成一张描述生命系统中一个子系统的"子网"。大家希望首先研究清楚这一个个的子网,然后再来研究各个子网之间的联系。这些子网可能很"小",例如把基因看做基本单元;也可能相当"大",例如把昆虫整体看做基本单元。因此,如何用复杂网络描述复杂系统恐怕还是一个需要付出极大努力的课题。

我们希望本章介绍的内容可以提供一个不同的例子,即使用复杂网络也可能给出从某个角度描述跨越不同科学领域的不同类复杂系统的方法。合作网络可能是一个大家比较熟知的例子。

社会网络,也就是用网络的观点和图论的数学工具来研究社会中各种关系,已经有了50年以上的历史[1,2]。在社会网络的著作中,从一个角度把社会网络分为"单模式网络(只有同一类节点(参与者))"和"双模式网络(有两类不同的参与者)",甚至更多模式的网络。双模式网络中存在两种泾渭分明的节点。在图论中,可以同时讨论两类节点,但是只考虑不同类节点之间的连边,称为二分图。实际上,二分图可以描述一大类实践上重要的网络,包含一些当前受到关注的研究分支,例如合作网、推荐网等。这些研究分支涉及经济、技术等各个领域,并不限于社会网络。我们在本章中主要讨论合作网。

一个复杂系统中大量基本单元之间的合作具有理论和实践的重要意义。在生物系统、生态系统、经济系统中,通常认为基本单元都是自私的,但是他们之间的各种形式的合作却是普遍现象。3.7节介绍过的演化网络博弈正是为了理解这种合作如何出现而做的努力[3]。这个研究方向显然意义重大。然而,从另一个角度看,在以人(或者由人组成的单位)为基本单元的社会网中,合作也可以被看做一种基本单元的基本属性。人处在社会中离不开合作,例如演员或者科研人员只有合作才能产生影片或科学论文。这种观点应该可以推广到非社会的

网络(例如技术、经济网络)中去。例如,可以认为中药药材只有合作,才能产生治病的中药方剂;食品只有合作,才能产生美味的菜肴;旅游景点只有合作,才能构成吸引人的旅游线路;公交站点只有合作,才能构成有效率的公交线路等[4,5]。

我们可以把合作网局限在更小的范围,以便研究的对象更加清晰。双模式网络的一种称为"隶属网",其中一类节点是在参与某种活动、事件或者组织的"参与者",例如演员、科研人员等;而另一类节点就是它们参与的活动、事件或者组织(称为"项目"),例如影片、科学论文等[6-10]。合作网属于隶属网中的一类,其中两个节点之间的边只表示它们的合作关系,忽略了其他关系(例如竞争、支配、隶属等)。虽然合作网络也适于用二分图描述,但是由于我们常常更加关心同一类节点之间的合作相互作用关系,例如演员之间在演出中的合作关系、科研人员之间在写作论文中的合作关系等,所以常常把二分图向一类节点(常常是参与者节点)投影,得到单模式网络。投影图中只出现参与者节点,项目节点是隐含的。参与每个项目的所有参与者节点之间都连有表示在此项目中合作关系的边,每个项目就表示为一个完全子图(称为"项目完全子图"),整个单模式网络成为完全子图的集合,如图10.1所示。

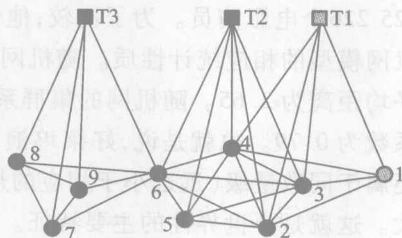


图10.1　描述二分图及其投影的草图(引自文献[5])

其中上排方点表示项目,下排圆点表示参与者,不同类节点之间的边属于二分图,同类之间的边属于向参与者的投影图。深黑色的圆点表示两个以上项目共用的节点

在作为复杂网络数学基础的图论中,一般只研究"简单图",不考虑两个节点之间多于一条的"多重边"。一个由这样的图描述的无权网络只能给出节点(基本单元)之间的相互作用存在与否的定性描述。然而,节点之间相互作用强度的差异常常起着至关重要的作用,例如演员合作网中,一对只合作演出一部影片的演员的合作密切程度与合作演了20部成功影片的演员显然根本不同。因此,大家常常把节点之间的相互作用强度(对于合作网就是合作次数)定义为这一对节点之间的"边权"。这样定义的网络称为"含权网"[11-14,5],因为我们在下面要强调节点权,所以建议更精确地称为"边权网"。

不管含权与否,在近年来的合作网研究中,二分图单模式投影图中的边都描述参与者之间无差别的合作关系。例如,在演员合作网中,主要演员与群众演员都被看成同样的节点,表示他们之间的合作关系的边也都一样。这显然是过分的简化。实际上,他们在合作中所起的作用当然是不同的,而且通常每个人都努力起更重要的作用,这就是一种竞争。上面说到合作可以看做一种节点基本属性,也可以说社会网络中,竞争是另一种节点基本属性。缺少或者企图抹杀竞争

的社会一定缺乏活力。这个思想同样可以推广到非社会网络。所以,复杂网络中的基本单元之间存在既合作、又竞争关系是最普遍的情况,纯粹的合作或者纯粹的竞争都是理想的极端情况。最近,对这样的普遍合作－竞争网络已经开始有研究结果,本章将在最后做简单介绍。

我们在本章中介绍、讨论的合作网与合作－竞争网仅属于上述用二分图及其投影来描述的一类。它们具有鲜明的共同拓扑特征,理所当然地应该显示共同的统计性质特征和共同的动力学机制。这些共性应该是复杂网络研究的根本目标之一。

10.2 比较早期的合作网实证研究

瓦兹(Watts)和斯绰伽兹(Strogatz)于1998年在Nature上发表的著名开创性论文中就列举了好莱坞演员合作网,作为实际网络的"小世界"性质的见证之一[6]。他们研究的数据来自1997年4月为止的因特网电影数据库,共包括225 226个电影演员。为了比较,他们列出了具有相同节点数和平均度(61)的随机网模型的相应统计性质。随机网的平均距离为2.99,而好莱坞演员合作网的平均距离为3.65。随机网的集群系数为0.000 27,而好莱坞演员合作网的集群系数为0.79。也就是说,好莱坞演员合作网的平均距离虽然比随机网大,但是还属于同数量级(远远小于相应的规则网的数值),而集群系数显著地比随机网大。这就是小世界性的主要特征。

巴拉巴斯(Barabasi)和阿尔伯特(Albert)于1999年在Science上发表的另一篇著名开创性论文中也列举了好莱坞演员合作网,作为实际网络的"无标度"性质的见证之一[7]。图10.2自左至右,分别显示1997年4月为止的因特网电影数据库的好莱坞演员合作网、万维网(325 729个网页)、美国西部电力网(4 941个电站)的度分布。巴拉巴斯和阿尔伯特当时认为这三个系统的度分布都遵循幂律。然而,第二年(2000年),阿莫拉尔(Amaral)和斯坦利(Stanley)等人就在PNAS上发表了关于好莱坞演员合作网和美国南加利福尼亚电力网度分布的新统计结果[15],如图10.3所示。其结果很可能说明巴拉巴斯和阿尔伯特当时关于演员合作网和电力网度分布都遵循幂律的结论不完全正确。图10.3(a)、(b)分别显示美国南加利福尼亚电力网度分布在单对数和双对数坐标的累计数据。显然,结果显示电力网度分布遵循一个指数函数分布。图10.3(c)、(d)分别显示好莱坞演员合作网度分布在单对数和双对数坐标的累计数据。看来演员合作网度分布既不完全遵循幂律,又不完全遵循指数函数分布。我们将在后面对此做仔细讨论。

纽曼(Newman)2001年在Phys. Rev. E的同一期上连续发表两篇长文,报

道了对科研合著网络所做的仔细实证调研结果[9]。他搜集了Los Alamos e-

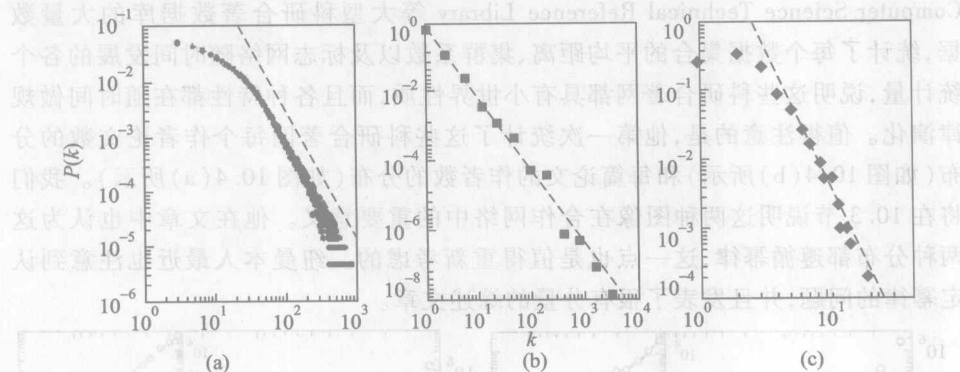


图 10.2　(引自文献[7])

自左至右,分别显示 1997 年 4 月为止的因特网电影数据库的好莱坞演员合作网、万维网(325 729 个网页)、美国西部电力网(4 941 个电站)的度分布

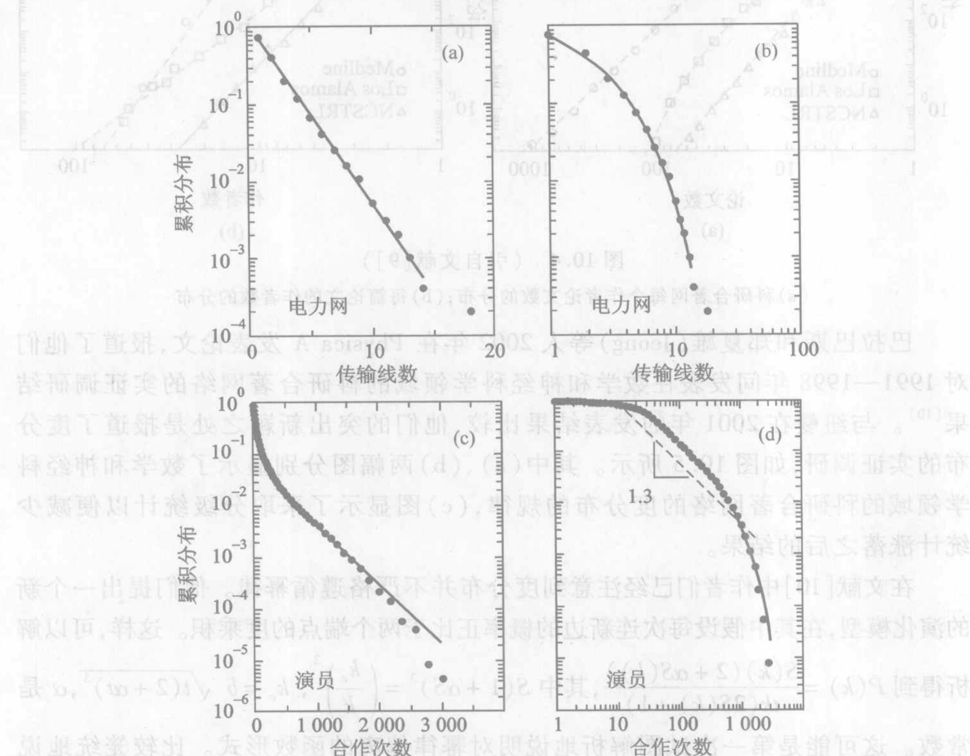


图 10.3　(引自文献[15])

(a)、(b)分别显示美国南加利福尼亚电力网度分布,(c)、(d)分别显示好莱坞演员合作网度分布

Print Archive, Medline, Stanford Public Information Retrieval System, Networked Computer Science Technical Reference Library 等大型科研合著数据库的大量数据,统计了每个数据集合的平均距离、集群系数以及标志网络随时间发展的各个统计量,说明这些科研合著网都具有小世界性质,而且各种特性都在随时间做规律演化。值得注意的是,他第一次统计了这些科研合著网每个作者论文数的分布(如图 10.4(b)所示)和每篇论文的作者数的分布(如图 10.4(a)所示)。我们将在 10.3 节说明这两种图像在合作网络中的重要意义。他在文章中也认为这两种分布都遵循幂律,这一点也是值得重新考虑的。纽曼本人最近也注意到认定幂律的问题,并且发表了很有分量的综述文章。

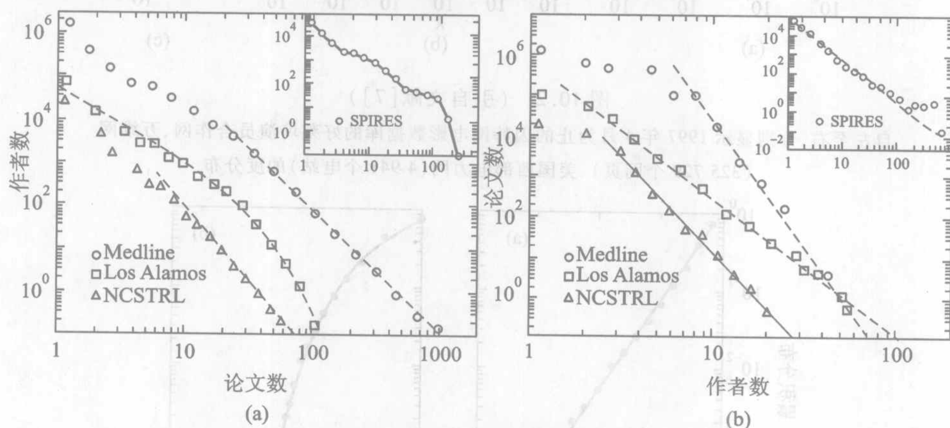


图 10.4 (引自文献[9])

(a)科研合著网每个作者论文数的分布;(b)每篇论文的作者数的分布

巴拉巴斯和郑夏雄(Jeong)等人 2002 年在 Physica A 发表论文,报道了他们对 1991—1998 年间发表在数学和神经科学领域的科研合著网络的实证调研结果[10]。与纽曼在 2001 年的发表结果比较,他们的突出新颖之处是报道了度分布的实证调研,如图 10.5 所示。其中(a)、(b)两幅图分别显示了数学和神经科学领域的科研合著网络的度分布的规律,(c)图显示了采取分级统计以便减少统计涨落之后的结果。

在文献[10]中作者们已经注意到度分布并不严格遵循幂律。他们提出一个新的演化模型,在其中假设每次连新边的概率正比于两个端点的度乘积。这样,可以解析得到 $P(k)=\dfrac{S(k)(2+\alpha S(k))}{tk(2S(k)+1)}$,其中 $S(1+\alpha S)^3=\left(\dfrac{k_c}{k}\right)^2$, $k_c=b\sqrt{t(2+\alpha t)^3}$,$\alpha$ 是常数。这可能是第一次试图解析地说明对幂律偏离的函数形式。比较笼统地说"近似幂律",或者"幂律尾",有了很大进步。10.3 节将介绍这个方向的进展。

图 10.6 显示了文献[10]所建议模型在不同演化时刻呈现的度分布规律,与图 10.5 显示的实证结果比较好地吻合。

图 10.5 （引自文献[10]）

其中(a)、(b)分别显示了数学和神经科学领域的科研合著网络的度分布的"幂律尾"规律。(c)显示了采取分级统计以便减少统计涨落之后的结果

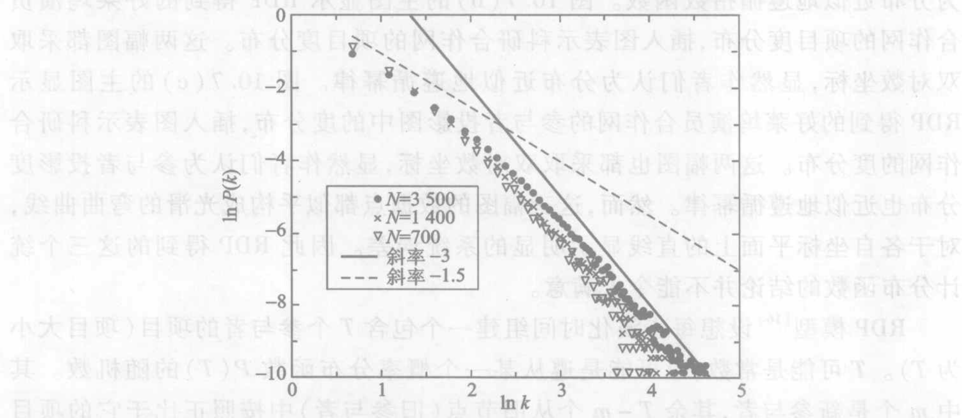


图 10.6 文献[10]建议模型在不同演化时刻呈现的度分布规律(引自文献[10])

10.3 合作网的项目大小分布和项目度分布

前两节介绍的用二分图或者单模式投影描述的合作网的共同拓扑特征是两类节点之间的连边或者“项目完全子图的集合”。显然,项目和参与者之间的关系是合作网中最重要的统计量。如果说单模式网络的度分布是最重要的(由于它们可能说明网络的最重要拓扑特征(网络近似均匀或者非常不均匀)和相应的动力学演化机制[7]),那么,由于合作网络具有项目和参与者这两类节点,而且在二分图中只有不同类的节点之间才可能连边,就必须首先研究两类节点的两种度分布,即一个参与者参与的项目数(称为“节点项目度”,用 h 表示,就是二分图中参与者节点与项目节点的连边数)和一个项目中包含的参与者数(称为“项目大小”,用 T 表示,就是二分图中项目节点与参与者节点的连边数)。在社会合作网络的长期研究历史中早就注意到了这两个关键统计参量及其分布[1]。在 10.2 节中介绍的纽曼关于作者发表论文数的分布和论文包含作者数分布的实证研究[9]正是这两个重要统计性质。

罗曼司考(Ramasco)、多罗果夫斯基(Dorogavtsev)和帕斯托(Pastor-Satorras)(RDP)在 2004 年发表的论文是我们所知道的第一篇着重讨论这两个关键统计参量的文章。他们对好莱坞演员合作网、美国洛斯阿拉莫斯预印本数据库的科研合作网以及美国排名最前的 1000 个公司的公司领导人合作网进行了这两个统计参量分布的实证研究,并且提出了一个抓住合作网络“一个一个项目组织”这个基本演化特征的演化模型[16]。

图 10.7(a)的主图显示 RDP 得到的好莱坞演员合作网的项目大小分布,插入图表示科研合作网的项目大小分布。这两幅图都采取单对数坐标,作者们认为分布近似地遵循指数函数。图 10.7(b)的主图显示 RDP 得到的好莱坞演员合作网的项目度分布,插入图表示科研合作网的项目度分布。这两幅图都采取双对数坐标,显然作者们认为分布近似地遵循幂律。图 10.7(c)的主图显示 RDP 得到的好莱坞演员合作网的参与者投影图中的度分布,插入图表示科研合作网的度分布。这两幅图也都采取双对数坐标,显然作者们认为参与者投影度分布也近似地遵循幂律。然而,这三幅图的数据点都似乎构成光滑的弯曲曲线,对于各自坐标平面上的直线显示明显的系统误差。因此 RDP 得到的这三个统计分布函数的结论并不能令人满意。

RDP 模型[16]设想每步演化时间组建一个包含 T 个参与者的项目(项目大小为 T)。T 可能是常数,也可能是遵从某一个概率分布函数 $P(T)$ 的随机数。其中 m 个是新参与者,其余 $T-m$ 个从旧节点(旧参与者)中按照正比于它的项目度 h 的概率优选。当考虑 T 和 m 均为常数,且不计重复边的简单情况时,RDP

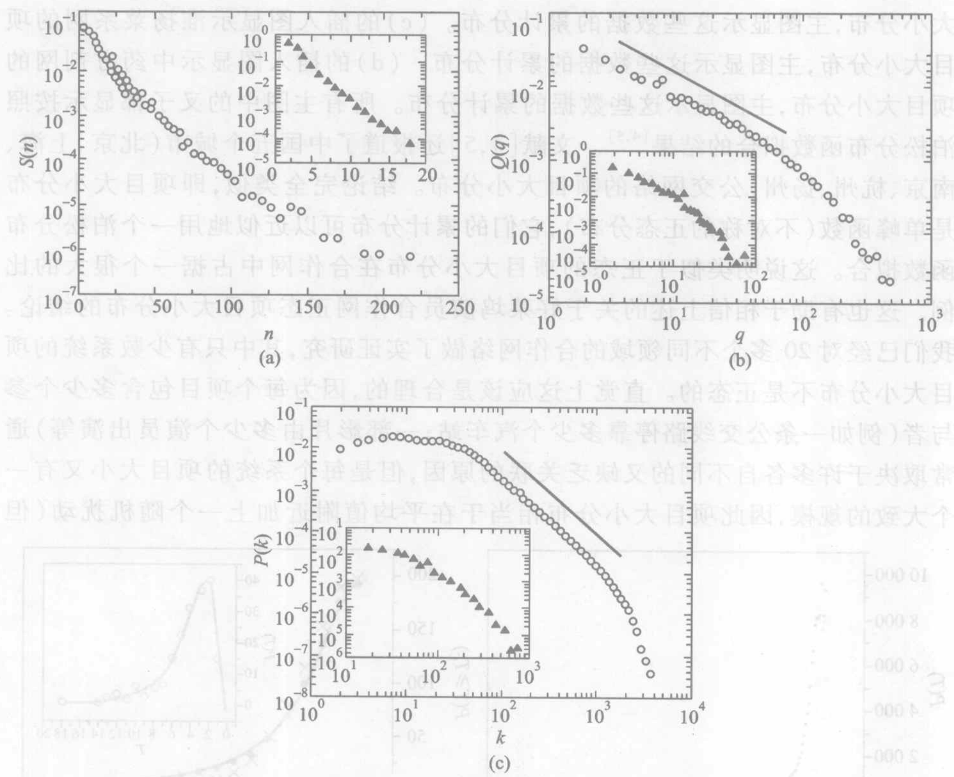


图 10.7 文献[16]得到的好莱坞演员合作网与科研合作网的项目大小分布、项目度分布和投影单模式图中的度分布(引自文献[16])

解析地证明了在参与者的投影单模式图中的度分布 $P(k)$ 和项目度分布 $P(h)$ 均为严格的幂函数,而且标度因子相同,都等于 $2+m/(T-m)$。由于上面介绍的实证统计分布函数的结论并不能令人满意,因此这个模型虽然有开创价值,但是与实证的对比也并不能认为足够好。

张培培、陈侃、何阅等人在 2006 年[4],常慧、苏蓓蓓、周月平、何大韧在 2007 年[5]报道了他们对好莱坞演员合作网、中药方剂合作网、淮扬菜肴合作网、中国旅游线路合作网以及中国五个城市的公交线路合作网的实证调研,并且在实证结果的基础上建议了一个进一步的合作网演化模型。

图 10.8 显示了文献[4,5]报道的四个实际合作网的项目大小分布。(a)显示文献作者们根据(与 RDP)在同一个数据库下载的、基本相同数量数据(392 304位演员和 181 455 部影片)的好莱坞演员合作网项目大小分布。在线性坐标上数据点虽然比较像一个指数衰减,但是却显示一个峰值(RDP 的图中取了对数很可能模糊了这个峰值)。(b)的插入图显示中国旅游线路网的项目

大小分布，主图显示这些数据的累计分布。(c)的插入图显示淮扬菜系网的项目大小分布，主图显示这些数据的累计分布。(d)的插入图显示中药方剂网的项目大小分布，主图显示这些数据的累计分布。所有主图中的叉子都显示按照泊松分布函数拟合的结果[4,5]。文献[4,5]还报道了中国五个城市(北京、上海、南京、杭州、扬州)公交网络的项目大小分布。结论完全类似，即项目大小分布是单峰函数(不对称的正态分布)，它们的累计分布可以近似地用一个泊松分布函数拟合。这说明类似于正态的项目大小分布在合作网中占据一个很大的比例。这也有助于相信上述的关于好莱坞演员合作网正态项目大小分布的结论。我们已经对20多个不同领域的合作网络做了实证研究，其中只有少数系统的项目大小分布不是正态的。直觉上这应该是合理的，因为每个项目包含多少个参与者(例如一条公交线路停靠多少个汽车站；一部影片由多少个演员出演等)通常取决于许多各自不同的又缺乏关联的原因，但是每个系统的项目大小又有一个大致的规模，因此项目大小分布相当于在平均值附近加上一个随机扰动(但

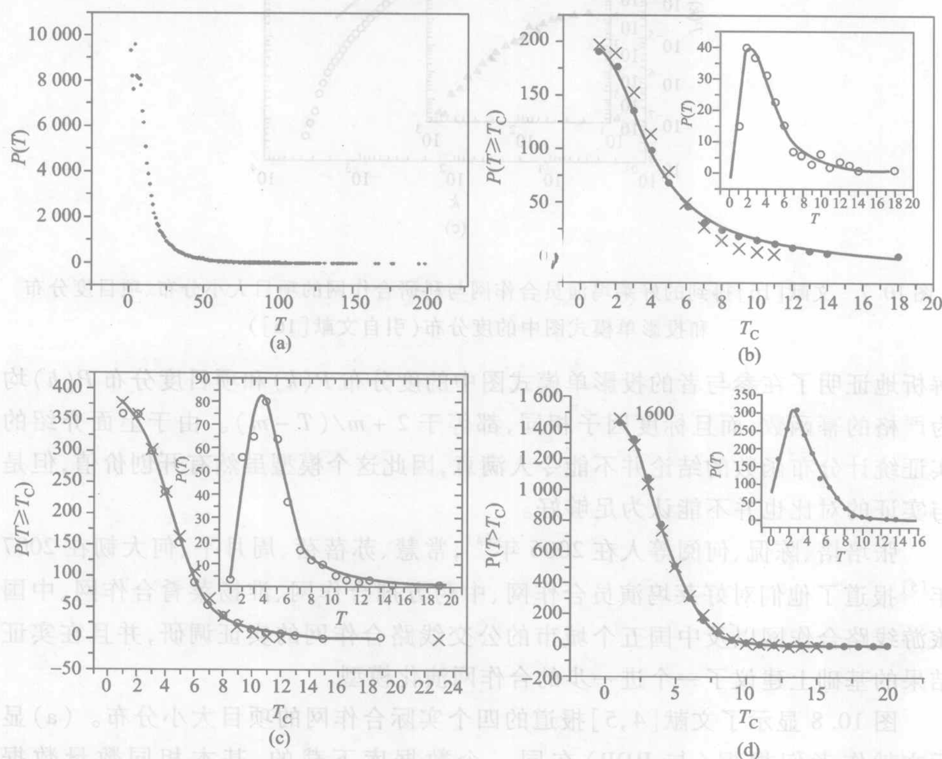


图 10.8　(a)好莱坞演员合作网，(b)中国旅游线路合作网，(c)淮扬菜肴合作网，(d)中药方剂合作网的项目大小分布(引自文献[4,5])

插入图都显示不累计分布，主图都显示累计分布

是扰动一般不是关于平均值对称的)。下面将要分析:这个结论与 RDP 得到的指数函数分布虽然相近,但是这个差别却具有重要的含义。

图 10.9 显示了我们课题组用上述好莱坞演员合作网数据得到的度分布(a)和项目度分布(b)。与上面图 10.7 的(b)、(c)主图所示的双对数平面显示比较,图 10.9 中画在 lnP-ln($x+a$)坐标平面上的两幅图中的数据点显然更好地符合于直线。也就是说,描述好莱坞演员合作网的项目度分布和度分布的更好函数形式为

$$P(x)\propto(x+a)^{-\eta},\tag{10.1}$$

其中 a 和 η 是两个关键的参数。文献[5]把这样的分布函数称为"漂移幂律"(shifted power law,简称 SPL)。容易得到,当 $a=0$ 时,SPL 分布变为典型的幂律;而当 $a\to\infty$ 时,SPL 分布趋于典型的指数函数。因此,SPL 表示幂律和指数函数之间的分布,当 a 连续地变化时,项目度分布连续地从幂律转变为指数函数。两个关键参数的意义是:参数 a 表示 SPL 分布更近于幂律或者更近于指数函数的程度;参数 η 表示 SPL 分布过渡到幂律时显示的标度因子。这样,在 a 不太大时,把 SPL 分布认为是幂律,或者在 a 比较大时,把 SPL 分布认为是指数函数并不奇怪。

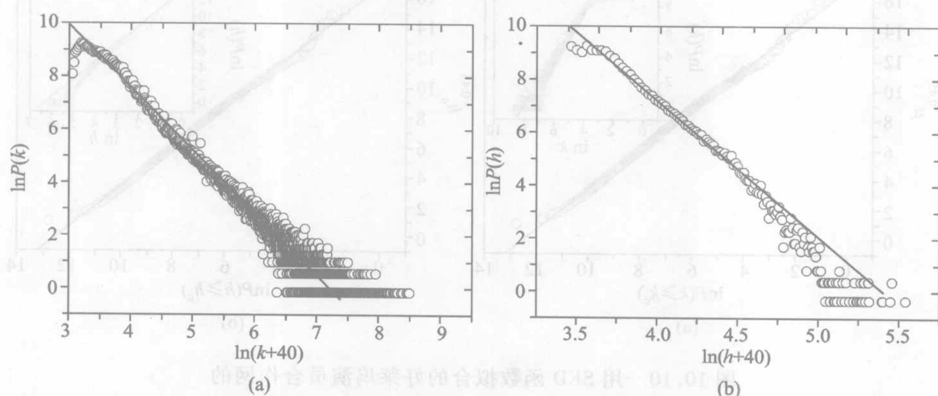


图 10.9 用 SPL 函数拟合的好莱坞演员合作网的(a)度分布和(b)项目度分布

注意到许多实际网络的度分布近于幂律又不是严格幂律的论文不少,由于篇幅限制不能一一列举。但是就我们所知,试图用定量的函数形式描述这些分布的很少,上述文献[10]中报道的模型和函数是这少数工作中比较著名的一个。大多数这样的论文都仅仅使用了一些含糊的名词来描述,例如"去头幂律"(truncated power law)、"幂律尾"、"去头的指数分布"等。文献[4]曾经提倡过使用所谓的"广延指数分布"(stretched exponential distribution,简称 SED)[17]。这种分布的原始分布规律为:$P(x)\,dx=\mu(x^{\mu-1}/x_0{}^{\mu})\exp(-(x/x_0)^{\mu})\,dx$,文献

[17]的作者拉赫热(Laherrere)和索奈特(Sornette)证明了对应的“累计统计分布”规律为：$P(x)=\exp(-(x/x_0)^\mu)$。它更方便用 $\ln P(x)\propto x^\mu$ 的形式表示。其中的关键参数 $\mu=1$ 时表示指数分布，$\mu\to 0$ 时表示幂律分布。μ 在 1 和 0 之间时，分布同样介于指数分布和幂律分布之间。文献[4]曾经报道了对上述 9 种实际网络中的 5 种的度分布和项目度分布的实证调研，都是用 SED 分布拟合的。

图 10.10 显示了文献[4]报道的用 SED 函数拟合的好莱坞演员合作网的累计度分布((a)主图)和累计项目度分布((b)主图)，图中的插入图显示了相应的双对数坐标图作为对比。由于采用了累计分布，看起来比图 10.9 显示的 SPL 分布拟合更好。我们对文献[4,5]研究的 9 个实际网络的度分布和项目度分布都分别做了 SED 和 SPL 函数拟合，如果都使用累计分布，没有看到拟合效果的很大差别。可以说两种显示幂律和指数分布的函数各有千秋。文献[5]转而提倡 SPL 分布，是由于作者们提出的合作网演化模型可以解析解出 SPL 分布，但是没有能够解出 SED 函数。

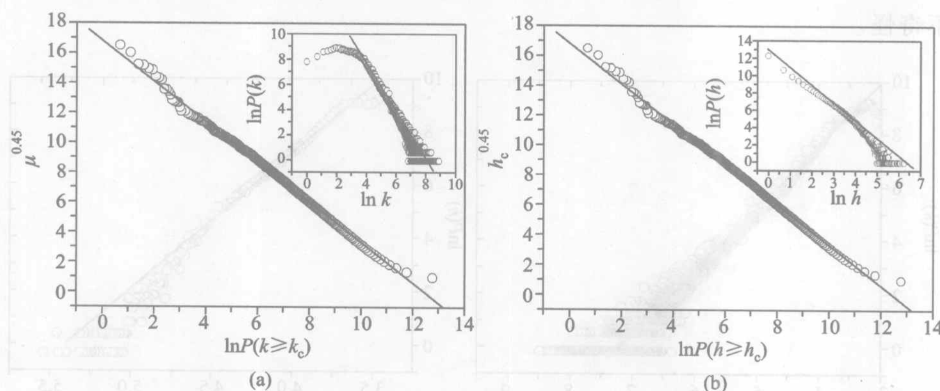


图 10.10 用 SED 函数拟合的好莱坞演员合作网的
(a)累计度分布和(b)累计项目度分布(引自文献[4])

限于篇幅，我们不能在此介绍上述文献[4,5]报道的所有九个实际网络的度分布和项目度分布的 SED 和 SPL 函数拟合，作为另一个例子，只能在图 10.11 中显示中药方剂合作网的项目度分布(a)、(c)和度分布(b)、(d)。它们类似地显示 SED 拟合稍好于 SPL 拟合。所有 9 个实际网络的度分布和项目度分布的实证结论都定性相同，但是有少数也显示 SPL 拟合稍好于 SED 拟合。

这样，文献[4,5]得到了与 RDP 相同的一部分结论，即这一类合作网络的度分布和项目度分布的函数形式总是定性相同。然而，RDP 认为这个函数总是幂律，而且度分布和项目度分布的幂律标度因子相同，而文献[4,5]却认为是更普

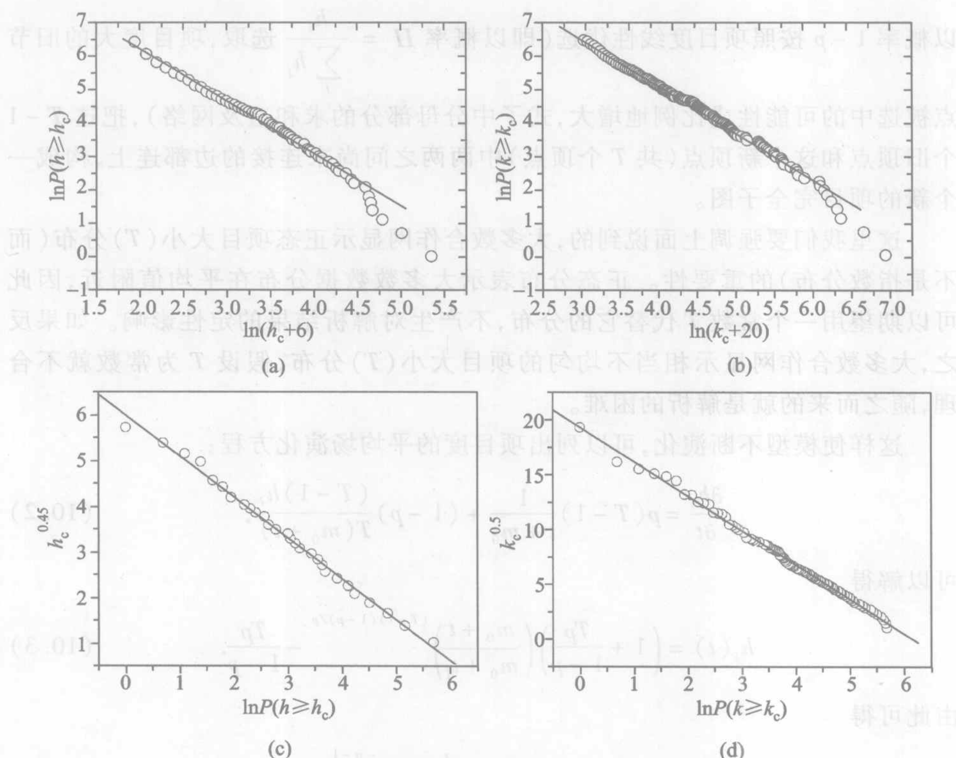


图 10.11 (a)用 SPL 函数拟合的中药方剂合作网的累计度分布,(b)累计项目度分布(引自文献[5]),(c)用 SED 函数拟合的中药方剂合作网的累计度分布,(d)累计项目度分布

遍的 SPL 分布或 SED 分布,幂律仅仅是它的一个极端情况。相应的,文献[4,5]也必须认为 RDP 模型中考虑的核心机制,即项目度线性优选,这仅仅是这一类合作网络的演化机制之一,应该改造这个模型,增加至少另一个与之竞争的机制,才可能得到更普遍的 SPL 分布或 SED 分布。

本书 7.6 节已经介绍过刘宗华和来颖诚的部分优选、部分随机选择模型[18],7.7 节介绍过李翔和陈关荣局域世界模型[19]。这两篇文献都用令人信服的实证研究结果说明了许多实际网络中除了线性优选之外,还应该考虑随机选择这个可能与之竞争的机制。文献[4,5]的作者们受到他们的启发,建议了一个改进的合作网络演化模型。

设初始 $t=0$ 时有 m_0 个节点,已经连接成若干个项目完全子图,它们的项目度 h_{i0} 之和为 h_0。每步时间演化过程增加一个新节点。然后,以一定的概率 p 随机地选取 $T-1$(T 为常数)个旧顶点(也就是每个旧节点被选中的可能性相同)、

以概率 $1-p$ 按照项目度线性优选（即以概率 $\Pi = \frac{h_i}{\sum_j h_j}$ 选取，项目度大的旧节点被选中的可能性成比例地增大，式子中分母部分的求和遍及网络），把这 $T-1$ 个旧顶点和这个新顶点（共 T 个顶点）中两两之间尚未连接的边都连上，构成一个新的项目完全子图。

这里我们要强调上面说到的，大多数合作网显示正态项目大小（T）分布（而不是指数分布）的重要性。正态分布表示大多数数据分布在平均值附近，因此可以期望用一个常数 T 代替它的分布，不产生对解析结果的定性影响。如果反之，大多数合作网显示相当不均匀的项目大小（T）分布，假设 T 为常数就不合理，随之而来的就是解析的困难。

这样使模型不断演化，可以列出项目度的平均场演化方程：

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} = p(T-1)\frac{1}{t+m_0} + (1-p)\frac{(T-1)h_i}{T(m_0+t)}, \tag{10.2}$$

可以解得

$$h_i(t) = \left(1+\frac{Tp}{1-p}\right)\left(\frac{m_0+t}{m_0+t_i}\right)^{(T-1)(1-p)/p} - \frac{Tp}{1-p}. \tag{10.3}$$

由此可得

$$P(h) = \frac{\eta}{(1+a)}\left(\frac{h+a}{1+a}\right)^{-\eta-1}, \tag{10.4}$$

其中 $a=\frac{Tp}{1-p}$，$\eta=\frac{T}{(T-1)(1-p)}$，这就是 SPL 分布（求解的详细过程可以参看文献[5]）。

计算节点的点强度 s（定义为节点邻边的边权和，对于合作网也就是节点所有重复的邻边数）时，总有 $s_i = s_i(T-1)$，所以在 t 够大时可以列出：

$$\frac{\partial s_i}{\partial t} = p\frac{(T-1)^2}{t} + (1-p)\frac{(T-1)s_i}{Tt}, \tag{10.5}$$

令 $\eta=\frac{T}{(1-p)(T-1)}$，$\alpha'=\frac{T(T-1)p}{1-p}$，得

$$p(s) = \frac{\eta}{T-1+\alpha'}\left(\frac{s+\alpha'}{T-1+\alpha'}\right)^{-\eta-1}. \tag{10.6}$$

即点强度的 SPL 分布中的关键常数 α' 是项目度分布的 SPL 分布中的关键常数 α 的 $T-1$ 倍，而参数 η 相同。数值模拟结果与上述解析结论很好地符合。

如果考虑 T 并不是常数，$P(T)$ 近于一个变形的泊松分布，可以用数值模拟求得项目度分布和点强度分布。模拟结果与上述解析结论定性相同。

10.4 合作网的同类性与项目度分布的相关性

纽曼在2002年提出了标志网络的另外一个重要统计参数，即所谓"同类性"(assortativity)[20]。同类性用一个在-1和1之间变化的参量r表征，表示网络中节点是否与类似自己的其他节点优先建立边连接。当r大于零时，节点优先与最类似自己的一类节点连接，网络称为"同类匹配"(assortative mixing)的；当r小于零时，节点优先与最不类似自己的一类节点连接，网络称为"非同类匹配"(disassortative mixing)的。如果特别地研究具有不同度的节点之间的连接，r大于零表示邻接节点度的正相关，即度高的节点优先与度高的节点连接；而r小于零表示邻接节点度的负相关，即度高的节点优先与度低的节点连接。纽曼建议在无向网中计算度之间同类性的公式为[20,21]：

$$r = \frac{M^{-1}\sum_{\Phi}\left(\prod_{i\in F(\Phi)} k_i\right) - \left(\frac{M^{-1}}{2}\sum_{\Phi}\left(\sum_{i\in F(\Phi)} k_i\right)\right)^2}{\frac{M^{-1}}{2}\sum_{\Phi}\left(\sum_{i\in F(\Phi)} k_i^2\right) - \left(\frac{M^{-1}}{2}\sum_{\Phi}\left(\sum_{i\in F(\Phi)} k_i\right)\right)^2}, \tag{10.7}$$

其中$F(\Phi)$表示第Φ个有连边的相邻节点对，M表示网络中总的边数。在此基础上，Leung和Chau(香港)定义了含边权网络的加权同类性的公式[21]：

$$r^{\omega} = \frac{H^{-1}\sum_{\Phi}\left(\omega_{\Phi}\prod_{i\in F(\Phi)} k_i\right) - \left(\frac{H^{-1}}{2}\sum_{\Phi}\left(\omega_{\Phi}\sum_{i\in F(\Phi)} k_i\right)\right)^2}{\frac{H^{-1}}{2}\sum_{\Phi}\left(\omega_{\Phi}\sum_{i\in F(\Phi)} k_i^2\right) - \left(\frac{H^{-1}}{2}\sum_{\Phi}\left(\omega_{\Phi}\sum_{i\in F(\Phi)} k_i\right)\right)^2}, \tag{10.8}$$

其中ω_{φ}表示第Φ个边的边权，H表示网络中总边权数。如果网络中所有的边权都为1的话，则加权后的定义r^{ω}就退化为无权情况下的定义r。

纽曼实证地研究了科研合著网、演员合作网、公司董事会及其成员之间的社会合作网、中学生的朋友关系网、e-mail网等社会网，以及美国电力网、因特网、WWW网、软件依赖关系网、蛋白质相互作用网、代谢作用网、神经网络、海洋食物链网、洁净水食物链网等非社会网络的r参数，发现所有这些社会合作网的r参数都为正。而所有这些非社会网络的r参数都为负[20]。然而，2003年之后，已经有人发现个别非社会网络的r参数为正。看来，不一定所有社会网络的r参数都为正，而所有非社会网络的r参数都为负，但是社会网络的r参数为正的可能性比较大，而非社会网络的r参数为负的可能性比较大。更多的实证结果显然是有益的，除了可能更好地说明社会合作网、非社会网络的r参数规律之外，探求度-度同类性和项目度(包括点强度、度)相关的规律也是必要的，可以猜想它们一定相关。

10.3节已经介绍了，中药方剂网(traditional Chinese herb prescription

formulation network，简称 TC）、中国旅游线路网（travel route network of China，简称 TR）、好莱坞演员合作网（collaboration network of Hollywood actors，简称 HA）和中国淮扬菜肴网（Huai-Yang recipes of Chinese cooked food，简称 HY）的项目度分布都遵循 SPL 函数。我们实证调研了这四种合作网络，以及上一节提到的中国五个城市公交网络（扬州公交线路网（bus route network of Yangzhou，简称 BY）、杭州公交线路网（bus route network of Hangzhou，简称 BH）、南京公交线路网（bus route network of Nanjing，简称 BN）、北京公交线路网（bus route network of Beijing，简称 BB）、上海公交线路网（bus route network of Shanghai，简称 BS）的度－度无权同类性以及加权同类性。表 10.1 除了显示这九个网络的无权同类性以及加权同类性以外，还显示了它们的项目度分布、点强度分布和度分布的 SPL 拟合函数的两个关键常数 α 和 η。表中，r 和 r^{ω} 分别表示无权同类性系数和加权同类性系数；项目度分布、度分布和点强度分布的 SPL 函数拟合参数 α 和 η 分别用 $\alpha-h$，$\alpha-k$，$\alpha-s$，$\eta-h$，$\eta-k$，$\eta-s$ 来表示；M 表示总项目数；N 表示总节点数。“?”表示由于数据限制没有计算。表中的结果倾向于显示以下结论：合作网络（不管是社会还是非社会网络）中，不计边权时的同类性系数有正有负，但计入边权后的同类性系数全为正。其中五个城市公交线路网络的结果还可能说明了另外一个结论，即网络规模越大，加权同类性系数越大，而不加权同类性却没有此规律。这个结论与 22 个波兰城市公交线路网[22]的结论符合。文献[22]还报道了另一个结论：小规模（节点数少于 500）的城市公交线路网的无权同类性系数是负值，而大规模（节点数大于 500）的城市公交线路网的无权同类性系数是正值。表 10.1 也显示：中国四个大规模（节点数都是大于 500）的城市公交线路网具有正的无权同类性，只有扬州公交线路网的节点数小于 500，它显示负的无权同类性。

表 10.1　9 个实际网络的无权同类性、加权同类性以及项目度分布、点强度分布和度分布的 SPL 拟合函数的两个关键常数 α 和 η（引自文献[5]）

参数 网络	M	N	r	r^{ω}	$\alpha-s$	$\eta-s$	$\alpha-h$	$\eta-h$	$\alpha-k$	$\eta-k$
BY	36	352	－0.11	0.04	∞	0.015	∞	0.38	100	5.01
BH	150	827	0.019	0.114	1 000	18.5	30	9.9	1 000	30.3
BN	252	1 764	0.047	0.160	100	3.1	10	4.6	100	4.3
BB	572	4 199	0.034	0.171	10 000	37.8	1 000	127.4	10 000	77.9
BS	968	4 374	0.05	0.202	200	3.3	30	6.6	200	5.3
TC	1 536	681	－0.12	0.17	20	1.5	6	1.7	100	5.7
TR	240	171	0.15	0.36	20	2.2	10	3.4	50	6.6
HA	80 000	210 448	0.265 3	0.000 46	40	2.1	30	5.4	0	2.3
HY	329	242	－0.296	?	10	1.2	5	1.6	20	2.4

在10.3节中，已经介绍了文献[4,5]的作者提出的合作网演化模型。文献[5]报道了这个模型在不同的随机连接旧顶点概率 p 下所生成网络的无权同类性系数和加权同类性系数的数值模拟结果，如表10.2所示。模拟计算所用的网络规模增长到5000个节点，项目含顶点数 T 是固定值6，进一步的计算表明，在定性的意义上计算结果与这两个参数的选择关系不大。

表10.2　文献[4,5]提出的合作网演化模型在不同随机连接旧顶点概率 p 下所生成网络的无权同类性系数和加权同类性系数(引自文献[5])

P	r^{ω}	r
0	0.000 8 ±0.003	−0.27 ±0.001 9
0.2	0.050 ±0.003	−0.10 ±0.001 9
0.4	0.13 ±0.004	−0.014 ±0.002 7
0.5	0.18 ±0.005	0.060 ±0.003
0.6	0.20 ±0.005	0.10 ±0.003 5
0.8	0.28 ±0.005	0.22 ±0.004
1.0	0.31 ±0.004 5	0.29 ±0.004

表中数据显示如下结论：(1)模型生成的网络在计入权重时显示正的同类性；(2)模型生成的网络在不计入权重时可能显示正的同类性或负的同类性；(3)加权同类性系数和无权同类性系数的值都随着随机选择旧顶点的概率 p 的增加而单调增加。结论(1)和(2)与表10.1的结论吻合非常好。结论(3)可能帮助我们理解上面表示实证结果的表中更复杂的数据。

在10.3节说明，从这个模型已经解析地得到了项目度SPL分布的两个关键参数 α 和 η 和随机选择旧顶点的概率 p 的显函关系式，现在又数值地得到了同类性系数随概率 p 变化的趋势，这样，就有可能了解项目度SPL分布的关键参数和同类性系数的定性依赖关系。由于 α、η、r 和 r^{ω} 的数值都和项目大小 T 有关，在表10.3中分别列出上述九种实际网络的项目大小分布峰值 T_{max}。

表10.3　九种实际网络的项目大小分布峰值 T_{max}(引自文献[5])

网络	BY	BH	BN	BB	BS	TC	TR	HA	HY
T_{max}	14	16	21	20	15	3	2	4	4

显然，这些实证网络可以被分为两组。项目大小分布峰值较大的为一组(5个城市公交线路网络)，较小的4个为另一组。图10.12显示了模型和后一组网络实证得到的无权同类性系数 r 与项目度分布 $P(h)$ 的关键参数 α 和 η 的关系(分别用 α-h 和 η-h 显示)。图中小方块点代表模型得到的 α-h 与 r 关系的值；小实心圆圈点代表模型得到的 η-h 与 r 关系的值(连接这些模型模拟数据点的

细实线仅表示可能的光滑连接，不表示拟合）；叉号代表实际系统得到的 α-h 与 r 关系的值；大空心圆圈点代表的是实际系统得到的 η-h 与 r 关系的值。图中实证数据点代表的实际系统从左至右依次是中国淮扬菜肴网、中药方剂网、中国旅游线路网、好莱坞演员合作网。

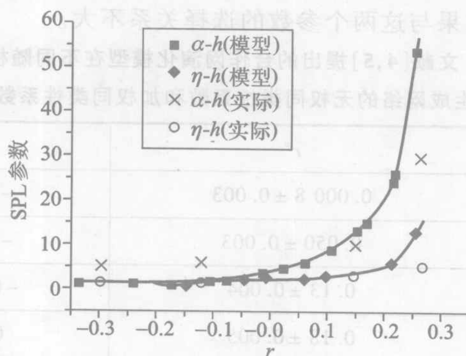


图 10.12　模型和实证系统中的无权同类性 r 与项目度分布 $P(h)$ 的关键参数 α 和 η 的关系（引自文献[5]）

图 10.12 中尽管只有 4 个实证数据，但仍可以判断模型模拟结果和实证结果定性吻合。这可能表明，文献[4,5]的作者提出的合作网演化模型不但可以用来解释项目度分布和度分布，还可以用来解释同类性系数和 SPL 函数关键参数之间的关系。得到的结论是：由于同类性系数与 SPL 函数关键参数都显示与随机选择概率 p 的单调依赖关系，因此它们之间也存在单调依赖关系。在实证网络的演化中，随机选择概率 p 很难被测量，但图 10.12 可能定性地说明：在这项目大小分布峰值较小的 4 个合作网络中，中国淮扬菜肴网演化中的随机因素是最小的（表明网络中有相对比较多、比较大的枢纽节点）；中药方剂网演化的随机因素是次小的；接下来就是中国旅游线路网；最后是好莱坞演员合作网（网络中枢纽节点相对少、小），其随机因素是最大的。

如果把 5 个城市公交线路网也画入这个与模型对比的图形，虽然这 5 个城市互相差别很大，但是 5 个城市的 10 个数据点都挤在一起，说明在这个图形上，同类的系统差别很小，必须像图上画的那 4 个系统那样，具有本质性差别，才能互相分开，与模型模拟曲线对比。

10.5　二分图投影的资源分配方法

二分图及其投影的描述方法不但适用于合作网络，也适用于其他一些网络。然而，一般说来，10.1 节所介绍的（也是合作网研究一直采用的）简单投影方法总要损失一些信息，因此，瑞士弗利堡大学和中国科技大学复杂性研究联合课题

组最近提出了一种把二分图投影为单模式图的新方法[23]。这种方法适用于所有二分图描述的网络。他们提出这种新方法的动机之一是考虑表示合作次数的边权的"饱和性"，也就是说，两个参与者开始重复合作时，多重复一次，他们重复合作的"亲密"效果加强得很快，但是重复很多次之后，这种亲密效果就会呈现"饱和"效应[24]。例如两个科研人员合作发表第二篇论文后，他们的合作亲密程度提高了很多，而在合作发表了100篇论文之后，再合作发表一篇对亲密程度的影响就小得多了。简单的边权描述表现不出这种饱和效应。另一个动机是考虑到合作的亲密效果不仅取决于合作次数，也取决于每个合作项目的参与者多少（项目大小）。例如两个作者只合著了一篇论文，但是这篇论文只有他们两个作者，他们肯定是熟悉的。反之，如果两个作者合著了10篇论文，但是每篇论文有100个作者，他们也可能不熟悉、甚至没有见过面。简单的边权描述也表现不出这种效应。第三个动机是考虑到简单的边权描述总得到"对称"的边权，即 $\omega_{ij}=\omega_{ji}$，然而，两个作者对他们的一篇合著论文对亲密程度贡献的估计是不同的。一个和许多作者合作过许多论文的作者应该给予较低的估计，所以更合理的边权应该不一定对称。最后一个动机是：在传统投影中，两个参与者之间的一条边是由两条二分图边投影得到的，这两条二分图边由两个参与者出发，通向同一个项目，因此，仅仅有一条二分图边的项目（即只有一个参与者的项目）在传统投影后就会消失。

出于以上考虑，文献[23]建议了一种把二分图投影为单模式图的新方法。他们不失一般性地假设每个参与者和每个项目都分配有一定的"资源"（例如研究经费、影片片酬等），而边权 ω_{ij} 表示参与者 j 通过这次合作（边）传递给 i 的资源所占比例。认为每个项目所有的资源一开始都平均地分配给了它的每个参与者。反过来，每个参与者这样分配到的权也应该再通过通向它们参加的项目的二分图边再平均分配给项目。这正像每个火车站上的旅客一开始平均地登上每列停靠的火车，然后每列火车上的旅客又平均地下到每个停靠的火车站。图10.13表述了这样的一个权分配过程。其中上面的圆点表示项目，下面的圆点表示参与者，x,y,z 表示资源。

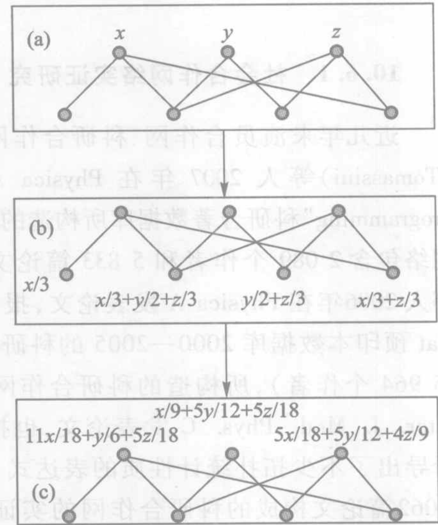


图10.13　二分图资源分配投影方法的图示（引自文献[23]）

对于图10.13,最后的资源分配可以由下面的公式得到

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/18 & 1/6 & 5/18 \\ 1/9 & 5/12 & 5/18 \\ 5/18 & 5/12 & 4/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}。 \tag{10.9}$$

对于一般的一个二分图,可以有公式

$$f'(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} f(x_j), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{k(x_j)} \sum_{l=1}^{m} \frac{a_{il} a_{jl}}{k(y_l)}, \tag{10.10}$$

其中$f(x_j)$表示参与者节点j在上述第一步分配到的资源,$f'(x_i)$表示参与者节点i最后分配到的资源,$k(x_j)$表示参与者节点j的度,$k(y_l)$表示项目节点l的度。

这样定义的边权分配解决了上述的各种传统投影具有的问题。以科研合作网为例,由于$\frac{\omega_{ij}}{k(x_j)} = \frac{\omega_{ji}}{k(x_i)}$,所以对于一条合作边,度大的节点赋的权小,而度小的节点赋的权大。而且由于上面公式表示的运算矩阵的对角元不为零,所以仅仅有一条二分图边的项目在投影后仍旧会保持信息。文献[23]讨论了这种投影方法在推荐网中的应用。这种投影方法还可能有更多的应用。

10.6 近期关于合作网络的实证研究

10.6.1 社会合作网络实证研究

近几年来演员合作网、科研合作网仍旧受到相当的重视。例如,汤玛斯尼(Tomassini)等人2007年在Physica A发表论文,报道了他们根据“General Programming”科研合著数据库所构造的科研合作网的实证研究。在2007年,这个网络包含2 089个作者和5 833篇论文(书或会议论文)[25]。卡迪罗(Cardillo)等人2006年在Physica A发表论文,报道了他们搜集美国洛斯阿拉莫斯cond-mat预印本数据库2000—2005的科研合作数据(2000年9 077个作者、2005年15 964个作者),所构造的科研合作网的实证研究[26]。周涛等人[27]2007年在Inter. J. Mod. Phys. C发表论文,也报道了一个一般的合作网络演化模型,解析导出了不少拓扑统计性质的表达式,同时报道了Phys. Rev. Lett. 第93卷的2 062篇论文构成的科研合作网的实证调研结果。刘杰、陆君安2004年在《复杂系统与复杂性科学》上发表论文,报道了1998年1月到2004年6月之间《物理学报》和《中国物理》两个刊物上发表的266篇混沌论文、360位作者构成的科研合著网的实证研究[28]。这个网络高度不连通,因此本文的特点是对各个连通“组群(群落)”的性质统计研究。由于网络较小,作者可以仔细地研究具

体数据,报道了一些涉及非线性科学研究同行的有趣具体性质,具有特色。张鹏、李梦辉、吴金闪、狄增如、樊瑛于2005年在《复杂系统与复杂性科学》和《复杂网络》一书的第2章中报道了他们对1992—2004年间,819位作者发表的808篇关于经济物理学的论文所构成的科研合著网的实证研究。这项研究的特色是研究了科研合作网络的"聚类(群落)"的主要划分算法的优劣[24,29],以及这种科研合作网络的加权方法、加权后的统计特征以及加权对其他统计特性的影响[24]。赫南、淦文燕、李德毅、康健初在2006年报道了对中国演员合作网的实证研究[30]。他们的数据来自Mtime网站,包括2 262个演员。文献[30]非常有特色。除了对中国演员合作网的规模发展和连通性演化的研究之外,文献[30]着重报道了对网络群落(community)以及对群落进行逐级骨干简约的研究结果。

10.6.2 交通合作网络实证研究

关于非社会合作网络的实证研究,首先要提到交通合作网。交通网络可以有不同的定义,其中两种是合作网络。以下将分别交通工具的种类给予介绍。

10.6.2.1 城市公共交通网

城市公共交通网包含两类基本单元:公交车站和公交线路,因此也可以用一个二分图描述。公交线路可以看作项目,公交车站可以看作项目的参与者。二分图向公交车站参与者投影就得到了一种交通合作网络,在交通网研究中被称为"P空间"[4,5,22,32-36]。也有人研究把二分图向公交线路项目的投影,在交通网研究中被称为"C空间"[33]或者"R空间"[34,36]。也就是说,在P空间中节点定义为公交车站,如果至少有一条公交线路停靠两个公交车站,则这两个车站之间连接一条边(同一个公交线路项目停靠的各个公交车站节点被看做在运送旅客的过程中无差别地合作);而在R空间中节点定义为公交线路,如果两条公交线路停靠至少同一个公交车站,则这两个公交线路之间连接一条边。这样,R空间也可以被看做一种交通合作网络,各个停靠同一个公交车站项目的公交线路节点被看做在运送这里的旅客的过程中无差别地合作。这两种定义的网络都是"项目完全子图"的集合,只不过项目和参与者的定义恰好相反。文献[4,5,22,32-36]都是交通合作网实证研究的例子,其中文献[22]报道了对波兰22个城市公交网络的实证调研,文献[33]报道了对世界上14个大城市公交网络的实证调研,文献[4,5,32,35-37]报道了对中国5个城市公交网络的实证调研。

交通网络还可以有另一种定义,被称为"L空间"[22,32-34,36,37]。其中节点仍旧定义为公交车站,但是边的定义不同,如果两个公交车站在至少一条公交线路中作为相邻的两个站点,则这两个车站之间连接一条边。L空间的图像类似于公交地图,不是交通合作网络。

10.6.2.2 铁路运输网

铁路运输网自然也可以有同样的三个空间的网络定义。在P空间中参与者节点定义为火车站,如果至少有一个火车车次停靠两个车站,则这两个车站之间连接一条边。在R空间中节点定义为火车车次,如果两条火车车次停靠至少同一个火车站,则这两个车站之间连接一条边。类似地,L空间中节点仍旧定义为火车站,如果两个车站在至少一个火车车次运行中作为相邻的两个站点,则这两个车站之间连接一条边。L空间的图像类似于火车站内常有的运行示意图,不是交通合作网络。文献[38]报道对L空间波士顿地铁网的实证研究,这可能是第一个关于铁路网的实证研究。文献[39]报道对印度P空间铁路运输网的实证研究,这可能是第一个关于铁路网P空间的实证研究。文献[40]报道了对L空间波士顿和维也纳地铁网的进一步实证研究。文献[34]报道了对所有三个空间的中欧铁路网和瑞士铁路网的实证研究,并且比较了不同铁路系统在不同空间中的一些统计性质。另外,文献[41]报道了对中国P空间铁路运输网的实证研究,文献[42]报道了对中国L空间和P空间铁路运输网的实证研究。

10.6.3 其他非社会合作网络实证研究

10.6.3.1 科研项目关系网

文献[43]报道了作者对欧共体资助的科研项目和参加这些项目的组织(参与者)构成的合作网的实证研究。所使用的数据包含1984—2004年间的27 758个科研项目和超过35 000个科研组织。文献对二分图的投影做了有特色的改进,并且建立了一个十分有意义的模型来解释实证结论。文献[44]报道了作者对1999—2004年中国国家自然科学基金资助的科研项目的实证研究。每个最小科研领域的编码定义为一个节点,如果一份基金申请书(合作项目)写上了两个领域编码,这两个节点之间就连接一条边。

10.6.3.2 语言文字关系网

语言文字合作网是非社会网络合作网络的另一个例子。关于英语和其他语言的网络描述不少,由于涉及计算机识别语言的重大应用前景,这个科研方向掀起了热潮,但是我们见到的绝大部分研究文献定义的都不是合作网。报道二分图描述语言文字网的有:文献[45]定义了汉语的字根网。字根就是大家通常说的"字首"、"偏旁"等符号,例如草头、宝盖、三点水等。作者定义了214种传统的汉字字根,在新华字典的第10版中检索到6 652个可以分解为这些字根的汉字。他们定义的网络中字根定义为节点,两个节点如果共同出现在一个汉字中,就连接一条边。显然,汉字相当于合作网的项目,字根相当于参与者。字根网实际是二分图向字根参与者的投影。然而,作者也定义了另一种二分图。对于占汉字一大部分的"形声字"(语音–语义字),他们把字根划分为语音字根和语义

字根两类,用不同类的节点表示,不同类节点之间的连边表示构成一个形声字。在文献[45]中研究了4 952个形声字、217个语音字根和1 293个语义字根。这样就构成了另一个汉字网。与此不同的是,文献[46]定义两种汉字网。每个汉字定义为一个节点,在第一种网中,如果两个汉字相互邻接地出现在至少一个句子中,就连接一条边。这相当于上述的L空间交通网。不少英语和其他语言的网络都采取这种定义。在第二种网中,如果两个汉字同时出现在至少一个句子中,就连接一条边。这相当于上述的P空间交通合作网。作者们应用1998年的《人民日报》全集作为数据来源,两种网分别包含62 281和60 482个汉字。

10.6.3.3 行政关系网

行政合作网是非社会网络合作网络的又一个例子。文献[47]定义了美国众议院的各个委员会(项目)和众议员(参与者)构成的行政合作网。数据包括了1989—2004年间的440位众议员、20个标准委员会和100个次级委员会。文章重点分析了网络的群落结构以及它们的产生过程。

10.6.3.4 其他

其他领域内的合作网实证研究还有:文献[48,4,5]报道了对中国旅游线路网的研究。各个旅游点定义为参与者节点,旅游线路(例如“几日游”、“某某民风民俗游”等)定义为项目。同时参与同一个旅游线路的两个旅游点之间连接一条表示合作(共同接待游客、分享利润)的边。数据包括了2003年全国的240个旅游线路、171个旅游点、719条边。文献[49,4,5]报道了中药方剂网。中药方剂定义为项目,中药药材定义为参与者节点。同时参与同一个中药方剂的两种中药药材之间连接一条表示合作(共同进行生化反应,形成有益于治疗的中药)的边。数据包括了最常用的、经过长期实践检验的1 536道中药方剂和681种药材。文献[50,4,5]报道了淮扬菜系网。每一道淮扬菜肴定义为项目,做菜用的主要食品(不包括调料)定义为参与者节点。同时参与同一个淮扬菜肴的两种食品之间连接一条表示合作(共同形成色、香、味俱全的一道菜肴)的边。数据包括了最有代表性的329道菜肴(项目完全子图),242种食品,它们之间共有1 713条边。

10.7 关于合作-竞争网络的研究

许多人很早就认识到:复杂系统中的基本单元之间既合作又竞争是最普遍的,纯粹的合作或者竞争都是理想的极端情况。然而,大多数有关论文都是分析性的,缺乏科学的定量的描述与研究。最近,已经开始有运用复杂网络这个工具,对普遍合作-竞争系统的一些研究结果。

10.7.1 经济关系合作-竞争网

经济领域内的复杂系统中,基本单元之间一般都不会仅仅存在理想的合作关系,竞争关系倒可能更普遍。许多系统的基本单元之间的合作-竞争关系也可以用二分图来描述。例如,文献[51]定义了日本的各个公司(参与者)和他们申请的专利(项目)构成的合作-竞争网,并且重点研究了二分图向申请公司参与者的投影。数据包括1994—2003年间4 998 464项专利。申请同一项专利的公司构成一个项目完全子图,它们当然是互相竞争的。文献[52]报道了对2004、2005年中国电子企业销售网络的实证研究。各个电子企业定义为参与者节点,它们生产的产品定义为项目。凡是生产同一种产品的企业之间连边,表示它们在销售市场上的既竞争又合作的关系。销售的竞争是显然的,然而,通常完全垄断市场,把所有的竞争对手都赶出去(甚至使他们破产)是办不到的。企业通常不得不接受大家瓜分市场的现实,这也就是一种合作。文献[53]报道了波兰公司的合作-竞争网络。各个波兰公司定义为参与者节点,它们归属的产业类别(例如建筑施工、建筑材料等)定义为项目。凡是至少归属于同一种产业类别的公司之间连边,表示它们在销售市场上既竞争、又合作的关系。数据包括2005年9月的50 000个大、中波兰公司。文献[54]报道了广州软件企业之间的竞争网。作者们定义软件企业为节点,两个节点之间如果存在竞争关系,但是又没有达到一个控制另一个的关系,就连一条边。如果达到一个控制另一个,或者两个企业成立合作的联合体,就把它们合并为一个节点。因此,两个节点之间仍旧应该看做合作-竞争关系。虽然文献[54]报道的广州软件企业网络没有用二分图描述,但是对比文献[53]报道的波兰公司的合作-竞争网络,可以认为文献[54]报道的广州软件企业网属于同一个产业类别,也就是只有一个项目的特别二分图向参与者的投影。文献[55]报道了二分图对银行服务业的描述。文献[56]建议了一个网上企业合作-竞争的模型。文献[57]建议了一个生产者-消费者网络的两个模型。网络用二分图来描述。生产者和消费者被定义为两类节点。两类节点之间的二分图边表示消费者选择该生产者的产品来消费。特殊之处是作者们定义每条边代表一个单位的消费,因此一个生产者节点的二分图度就代表它的销售额以及占据的市场份额。模型中网络演化的优选生长机制就代表了市场竞争中的富者更富的统计法则。这个网络主要描述生产者之间的合作-竞争关系。文献[57]建议的两个模型分别描述市场不生长或者在生长的情况。这是一篇很有特色的论文。

10.7.2 影片合作-竞争网

刘爱芬、付春花、张增平、常慧、何大韧在2007年报道了对中国内地影片网

的实证研究[31]。他们的数据来源于电影数据库。记录从 1920 到 2007 年 4 月 29 日,共收集了 3 085 部影片、920 个主要演员。与一般的思路不同,他们定义影片的主要演员为项目,他主演的影片为这个项目的参与者。这样定义是为了研究影片为了吸引观众而进行的竞争。许多影片的主演都属于当时的佼佼者,每个这样的演员所演的影片代表了一种特定的风格,可以代表一个特定的观众群体。其中哪一部影片能在这个观众群中吸引最多的注意,就能得到最大的经济和名声效益。因此,影片节点之间边的定义为:如果两部影片中聘请同一个主要演员,则这两部电影之间就用一条边连接,这个边不再表示演员之间无差别的合演关系,而表示两部电影在一个特定的观众群体中的竞争关系。

10.7.3　节点权描述竞争的合作－竞争网

文献[58]建议了一个对隶属合作－竞争网络的描述方法,即引入一个表示参与者节点在合作－竞争项目中的“合作重要性”或者“竞争结果份额”的节点权。不含节点权的网络拓扑性质仍旧表示合作－竞争的“态势”,即哪些参与者在哪些项目中既合作又竞争。含节点权的统计性质则描述竞争的性质。为了形象地说明这个思想,文献[58]报道了对扬州大学大学生选课网和图书借阅网的实证研究。在大学生选课网中,参与者定义为公选课程,项目定义为课程所属的学科。如果两门公选课程属于同一个学科,它们之间连接一条边,表示它们在给予学生这个学科需要的知识时的合作－竞争关系。一个参与者(一门公选课程)的点权定义为选过这门课程的学生人数。数据来自 2002—2006 年扬州大学的选课数据,包括 121 门全校公选课、78 个学科、65 536 名选课本科学生。在图书借阅网中,参与者定义为扬州大学敬文图书馆的物理类图书,项目定义为图书内容所属的学科。如果两本图书属于同一个学科,它们之间连接一条边,类似地表示它们在给予学生这个学科需要的知识时的合作－竞争关系。一个参与者(一本图书)的点权定义为借阅过这本书的学生人次数。数据来自扬州大学到 2006 年为止的图书借阅数据,包括 3 207 本物理类图书、227 个学科、88 981 次借阅记录。文献[59]进一步讨论了这种方法,提出了更多的节点权统计性质,并且报道了对水果所含营养成分网络的实证研究。作者们把一种水果定义为一个项目,水果所含的营养成分定义为参与者,如果两种营养成分包含在至少一种水果中,它们之间就连一条表示合作－竞争关系(基本是合作,但是所起的重要程度不同,就是一种竞争)的边。一个参与者(一种营养成分)的点权定义为该营养成分的含量。数据包括 151 种水果和 45 种营养成分。

值得注意的是:在上述三个网络中,总点权(即一个参与者在所有项目中点权之和)的分布都是严格的或者近似的幂律分布,这很可能说明这样定义的点权抓住了网络中竞争的要点。

第十章参考文献

[1] Wasserman S and Faust k. Social Network Analysis: Methods and Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

[2] 罗家德．社会网分析讲义．北京：社会科学文献出版社，2005.

[3] G. Szabo and G. Fath, Evolutionary games on graphs, arXiv: cond-mat/0607344v2.

[4] P. P. Zhang, K. Chen, Y. He, T. Zhou, B. B. Su, Y. Jin, H. Chang, Y. P. Zhou, L. C. Sun, B. H. Wang and D. R. He, Physica A, 360 (2006) 599.

[5] H. Chang, B. B. Su, Y. P. Zhou and D. R. He, Phsica A, 383 (2007) 687.

[6] D. J. Watts and S. H. Strogatz, Nature, 393 (1998) 440.

[7] A-L. Barabasi and R. Albert, Science, 286 (1999) 509.

[8] M. E. J. Newman, PNAS, 98(2) (2001) 404.

[9] M. E. J. Newman, Phys. Rev. E, 64 (2001) 016131; M. E. J. Newman, Phys. Rev. E, (2001) 016132.

[10] A-L. Barabasi, H. Jeong, Z. Neda, E. Ravasz, A. Schubert and T. Vicsek, Physica A, 311 (2002) 590.

[11] S. H. Yook, H. Jeong, A-L. Barabasi and Y. Tu, Phys. Rev. Lett., 86 (25) (2001) 5835.

[12] M. Barthelemy, A. Barrat, R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, Physica A, 346 (2005) 34.

[13] Z. Pan, X. Li and G. R. Chen, Phys. Rev. E, 73 (2006) 056109.

[14] M. Li, Y. Fan, J. Chen, L. Gao, Z. Di and J. Wu, Physica A, 350 (2005) 643.

[15] L. A. N. Amaral, A. Scala, M. Barthelemy and H. E. Stanley, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 97 (2000) 11149.

[16] J. J. Ramasco, S. N. Dorogovtsev and R. Pastor-Satorras, Phys. Rev. E, 70 (2004) 036106.

[17] J. Laherrere and D. Sornette, Eur. Phys. J. B, 2 (1998) 525.

[18] Z. Liu, Y. C. Lai, N. Ye and P. Dasgupta, Physics Letters A, 303 (2002) 337.

[19] X. Li and G. R. Chen, Physica A, 328 (2003) 274.

[20] M. E. J. Newman, Phys. Rev. Lett., 89 (2002) 208701; M. E. J. Newman, Phys. Rev. E, 67 (2003) 026126.

[21] C. C. Leung and H. F. Chau, Physica A, 378 (2007) 591.

[22] J. Sienkiewicz and J. A. Holyst, Phys. Rev. E, 72 (2005) 046127.

[23] T. Zhou, J. Ren, M. Medo and Y. C. Zhang, Phys. Rev. E, 76 (2007) 046115.

[24] 李梦辉，樊瑛，狄增如．加权网络．//郭雷，许晓鸣，等．复杂网络．上海：上海科技出版社，2006：27－48.

[25] M. Tomassini and L. Luthi, Physica A, 385 (2007) 750.

[26] A. Cardillo and S. V. Scellato Latora, Physica A, 372 (2006) 333.
[27] T. Zhou, B. H. Wang, Y. Jin, D. R. He, P. P. Zhang, Y. He, B. B. Su, K. Chen, Z. Z. Zhang and J. G, Liu, Int. J. Mod. Phys. C, 18 (2007) 297.
[28] 刘杰，陆君安. 复杂系统与复杂性科学,2004,1(3):56.
[29] 张鹏，李梦辉，吴金闪，狄增如，樊瑛. 复杂系统与复杂性科学，2005,2(3):30.
[30] 赫南，淦文燕，李德毅，康健初. 复杂系统与复杂性科学，2006,3(4):1.
[31] 刘爱芬，付春花，张增平，常慧，何大韧. 复杂系统与复杂性科学，2007,4(3):10.
[32] Y. Z. Chen, N. Li and D. R. He, Physica A, 376 (2007) 747.
[33] C. V. Ferber, T. Holovatch, Y. Holovatch and V. Palchykov, Physica A, 380 (2007) 585.
[34] M. Kurant and P. Thiran, Phys. Rev. E, 74 (2006) 036114.
[35] B. B. Su, H. Chang, Y. Z. Chen and D. R. He, Physica A, 379 (2007) 291.
[36] X. Xu, J. Hu, F. Liu and L. Liu, Physica A, 374 (2007) 441.
[37] 赵金山，狄增如，王大辉. 复杂系统与复杂性科学，2005,2(2):45.
[38] V. Latora and M. Marchiori, Physica A, 314 (2002) 109.
[39] P. Sen, S. Dasgupta, A. Chatterjee et al., Phys. Rev. E, 67 (2003) 036106.
[40] K. A. Seaton and L. M. Hackett, Physica A, 339 (2004) 635.
[41] W. Li and X. Cai, Physica A, 382 (2007) 693.
[42] 赵伟，何红生,林中材,杨孔庆. 物理学报，2006,55(8):3906.
[43] M. J. Barber, A. Krueger, T. Krueger and T. Roedinger - Schluga, Phys. Rev. E, 73 (2006) 036132.
[44] J. Liu, Y. Dang and Z. Wang, Physica A, 366 (1) (2006) 578.
[45] J. Li and J. Zhou, Physica A, 380 (2007) 629.
[46] S. Zhou, G. Hu, Z. Z. Zhang and J. Guan, 将发表于 Physica A (2008).
[47] M. A. Porter, P. J. Mucha, M. E. J. Newman and A. J. Friend, Physica A, 386 (2007) 414.
[48] 常慧,何阅,张义勇,苏蓓蓓,何大韧. 科技导报,2006,24 (9):84.
[49] 何阅,张培培,唐继英,韩雪芳，邱荣,陈其娟,周月平,常慧,何大韧. 科技导报，2005 23(11):36.
[50] 张培培,侯威,何阅,何大韧. 复杂系统与复杂性科学，2005,2 (2):9.
[51] H. Inoue, W. Souma and S. Tamada, Physica A, 383 (2007) 152.
[52] Y. P. Zhou, H. Chang, L. Chen and D. R. He, DCDIS B Supplement, Complex Networks, 14 (S7) (2007) 142.
[53] A. M. Chmiel, J. Sienkiewicz, K. Suchecki and J. A. Holyst, Physica A, 383 (2007) 134.
[54] J. Yang, L. Liu, W. Xie, G. Chen and D. Zhuang, Physica A, 382 (2007) 704.
[55] J. Yang, D. Zhuang and S. J. Wang, 2006, Proceeding of the Conference of Chinese Complex Network (CCCN 06), Wuhan.
[56] J. Jiang and Z. Cheng, Physica A, 363 (2006) 527.

[57] D. Wang, Z. Li and Z. Di, Physica A, 363 (2006) 359.
[58] C. H. Fu, Z. P. Zhang, H. Chang, J. R. Tao, Z. H. Chen, Y. L. Dai, W. Zhang and D. R. He, Physica A, 387 (2008) 1411.
[59] Y. Qu, Y. M. Jiang and D. R. He, J. Syst. Sci. & Complexity, 即将发表.

第十一章　网络动力学的一些探索

广义的动力学是指系统演化行为的机制，而演化可以从各种不同角度刻画，所以许多类型的讨论都可以说属于动力学。例如，对本书讨论的复杂网络，前面介绍的网络演化模型、演化网络博弈、网络上的传输等部分都在讨论演化行为及其机制，都属于动力学。然而，传统物理学中的动力学常常意味着从系统基本单元的相互作用以及外界对它们的作用出发，通过大量、长时间的实践和深入思考，总结出这些相互作用和系统运动、演化行为关系的普适的深刻的规律，来预言系统未来的行为，为人类的实践服务。对复杂系统还难于做到这一点，复杂网络的研究也是这样。然而，虽然困难，仍旧不断地有人向这个方向努力。我们在本章中根据自己的了解，简单介绍一些这个方向的探索。

11.1　布尔网络、信息距离及一些复杂网络的非线性动力学

本书 1.6 节中十分简略地介绍过的非线性动力学包含十分丰富的内容。然而，其中的工具和方法都针对可以用微分方程或者迭代方程描述的系统，这些系统常常不属于典型的复杂系统。能不能把非线性动力学的某些工具和方法应用到复杂网络的演化问题研究中来？这是网络动力学研究的另一个可能方向[1,2]。本节将简单地介绍这个研究方向的一部分内容。

11.1.1　布尔网络及其非线性动力学性质

本书 1.7 节介绍的原胞自动机是第一个可以展示规则与混沌之间的复杂运动的、具有严格运动学和动力学描述方法的研究工具。它也可以被看做一种具有规则拓扑结构的网络。这种网络具有基本单元的分立状态描述，以及这些状态随离散时间变化的演化法则。它能够类比于人们研究非线性简单系统得到的知识，引入系统演化的瞬态、吸引子、吸引域等有用概念，以及对吸引子类型的定量刻画方法。这是一般复杂网络描述缺少的。然而，如前所述，原胞自动机的规则结构、所有基本单元统一的演化法则和最近邻相互作用的规定太过简单，与实际复杂系统不符。最好能提出这样一种网络拓扑和演化规定，它能够保留原胞自动机的优点，克服它的缺点，更接近于实际复杂系统，同时又具有完整的动力学框架。考夫曼（S. A. Kauffman）在 1969 年首先提出的布尔网络正是一种为解释生命起源而提出的这样的网络描述工具[3]。一个布尔网络包含 N 个节点，

它们未必一定分布在规则的空间点阵上。节点两两之间存在不限于局域的互相作用(或称为“输入”,也就是连边),根据对每个节点可能不同的演化法则,使得每个节点同步地从一个离散时刻的分立状态(常常简化地假设只有两个状态,用0,1符号表示)演化为下一个离散时刻的分立状态,同时连边也同步地演化到下一个离散时刻的连边状态。如此不断地演化。在21世纪初以来,更常用的布尔网络模型是所谓的“随机布尔网络”。考夫曼在他最近的一篇论文[4]中把随机布尔网络简明地描述为:网络的节点定义为 N 个二元变量 $x_i \in \{0,1\}$ $(i=0,\cdots,N-1)$;每个节点连接其他 k 个节点(具有 k 条边),并且根据它自己的“布尔函数” f_i 在每个离散时刻更新它的二元状态;也就是 x_i 在每个离散时刻把它的二元状态变化为 $x_i(t+1)=f_i(x_{i_1}(t),\cdots,x_{i_k}(t))$,其中 x_{i_l} $(l=0,\cdots,k)$ 表示它的邻点。每个节点的初始布尔函数和连边是随机赋予的,但是在演化中布尔函数保持不变。布尔函数的随机赋予统计法则是

$$f_i(x_{i_1}(t),\cdots,x_{i_k}(t))=\begin{cases}1, \text{ 概率为 } p, \\ 0, \text{ 概率为 } 1-p,\end{cases}$$

其中 $p\in[0,1]$。这样,布尔网络可以被认为是一些实际网络的数学抽象,它的“结构”(即节点的状态及连接)和“动力学”(即演化法则)都可以用二元序列集合来定量表述,这非常有利于进一步描述网络的演化及其动力学行为。

既然有演化,就有演化的过程。如果从一些不同的初始条件都演化到一个确定的“归宿”或者“终态”(不一定规则,也不一定完全不变化),则也可以划分出演化的“瞬态”,并且定义此终态为这些初始条件的“吸引子”,而这些初始条件为吸引子的“吸引域”,正像非线性动力学中经常做的一样。既然有吸引子和吸引域,也就说明系统的动力学行为对于初值在一定范围内的不确定性或者一定大小的干扰是稳定的。早就研究清楚了:在布尔网络中,对于一个确定的布尔函数概率 p,存在一个连接阈值 k_c,当 k 小于此阈值时,布尔网络经过瞬态演化到某个“规则”终态斑图,也就是一个确定的布尔网络结构二元序列集合,对此终态的一个节点施加小扰动引起的后果也是小的,而且会随时间演化逐渐消失(如图11.1所示);而当 k 大于此阈值时,布尔网络经过瞬态演化到某个“混沌”终态斑图,在此终态所有的初态信息全部丢失,而且网络展现对干扰无比敏感的、貌似随机的混沌状态,对一个节点的小扰动可以引起甚至遍及整个网络的“变化雪崩”[4-10]。

布尔网络虽然是十分简化的模型,但却已经被证明在生命科学、金融科学以及其他一些典型复杂系统研究中可以起重要作用[11,12]。例如,已经很好地说明:规则与混沌之间的临界状态会展示最丰富的动力学行为,生命体中的分子一定处于这样的临界状态。文献[1,13]是对原胞自动机和布尔网络的很好的简明综述。

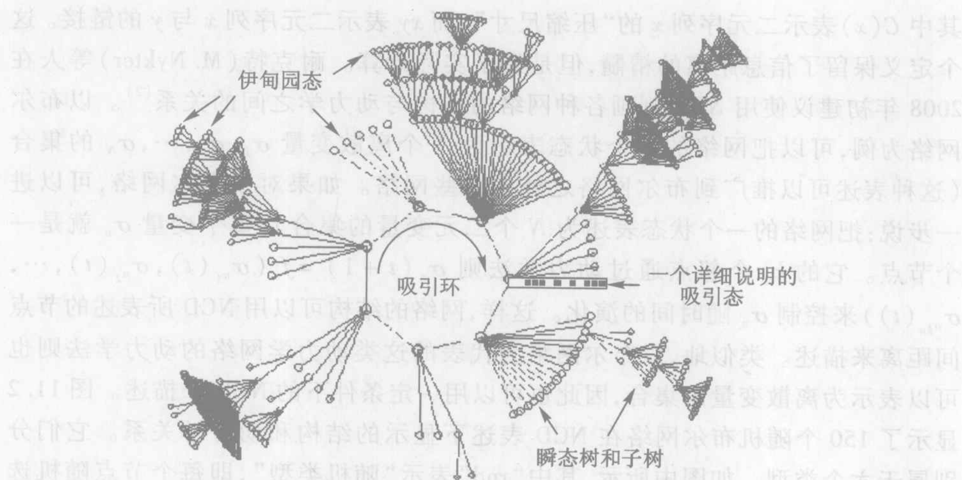


图 11.1 一个随机布尔网络被吸引到一个 7 周期极限环的图示(引自文献[1])

传统的图论完全不包含相变、吸引子、吸引域、混沌这些概念,但是布尔网络作为原胞自动机的继承与发展,自然地引入了这些动力学描述,甚至可以引进李雅普诺夫指数这样的动力学工具[9]。可惜的是,布尔网络太简单,只能比较好地描述一部分实际网络的一部分行为。最好能有一种办法保持它的简单性和动力学工具特征,又能把它更普遍地推广。下面将介绍这方面的一种尝试。

11.1.2 信息距离、压缩距离及其表述的结构与动力学关系

本书 1.3 节介绍过的算法复杂性(也被称为 kolmogorov 复杂性)定义为在普适计算机上计算一个一个二元序列 x 的最短程序长度。在第 1 章中我们说过,这种对复杂性的认识在 20 世纪 70 年代以后受到否定,然而,在这里我们将介绍,最近这种复杂性认识在新的框架下可能会具有新的生命力。

拜纳特(C. H. Bennett)等在 1998 年提出两个二元序列之间的“信息距离”的概念,它定义为两个二元序列 x,y“互相翻译”,即从一个产生另一个所需的最小信息量[14]。作者们给出证据,说明此定义适用于模式识别、认知科学、计算的物理本质以及其他许多应用领域。实际上,在各个领域内,早就有人定义各种系统中基本单元之间的各种可实际测量的、或者只能估计的、或者根本抽象的“距离”[15],这可能暗示我们现在介绍的方法可能推广到各个实际领域。M. Li 等在 2004 年为了克服信息距离难于计算的缺点,建议了使用通常实用的信息压缩算法(例如 gzip,bzip 等)产生所谓的“归一压缩距离”(normalized compression distance,简称 NCD)[16],它的定义为:$\mathrm{NCD}(x,y)=\dfrac{C(xy)-\min\{C(x),C(y)\}}{\max\{C(x),C(y)\}}$,

其中 $C(x)$ 表示二元序列 x 的"压缩尺寸"，而 xy 表示二元序列 x 与 y 的链接。这个定义保留了信息距离的精髓，但是易于实际计算。耐克特（M. Nykter）等人在2008年初建议使用NCD刻画各种网络的结构与动力学之间的关系[2]。以布尔网络为例，可以把网络的一个状态表示为 N 个离散变量 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N$ 的集合（这种表述可以推广到布尔网络之外的一些网络。如果对于布尔网络，可以进一步说：把网络的一个状态表述为 N 个二元变量的集合），每个变量 σ_n 就是一个节点。它的 k_n 个邻点通过动力学法则 $\sigma_n(t+1) = f_n(\sigma_{n_1}(t), \sigma_{n_2}(t), \cdots, \sigma_{n_{kn}}(t))$ 来控制 σ_n 随时间的演化。这样，网络的结构可以用NCD所表述的节点间距离来描述。类似地，以布尔网络为代表的这类动力学网络的动力学法则也可以表示为离散变量的集合，因此也可以用一定条件下的NCD来描述。图11.2显示了150个随机布尔网络在NCD表述下显示的结构和动力学关系。它们分别属于六个类型。如图中所示，其中"rnd"表示"随机类型"，即每个节点随机选择 K 个其他节点邻接；"reg"表示"规则类型"，即节点都被安排在一个规则点阵上，并且与它的 K 个邻点连接。网络的节点总数都是1000。图中的数据点是这些布尔网络按照布尔法则从随机初态演化100步，忽略开始90步，记录最后10步得出的，表示演化的吸引子。横轴表示计算得到的同一类型中两个网络之间的平均NCD结构距离，纵轴表示这两个网络之间的平均NCD动力学距离。可以看到，每个类型（在生命科学中常常对应进化序列中的同类生物）在图中互相可以被清晰分割地聚集在一起。可以说明，$K=2$ 的随机类型最接近规则与混沌之间的临界状态[2]。在图中可看到每个布尔网络吸引子集团内部的两个网络动力学间距随着向这个临界状态靠近而增大，说明规则与混沌之间的临界状态显示最大的信息丰富性（差异性）。

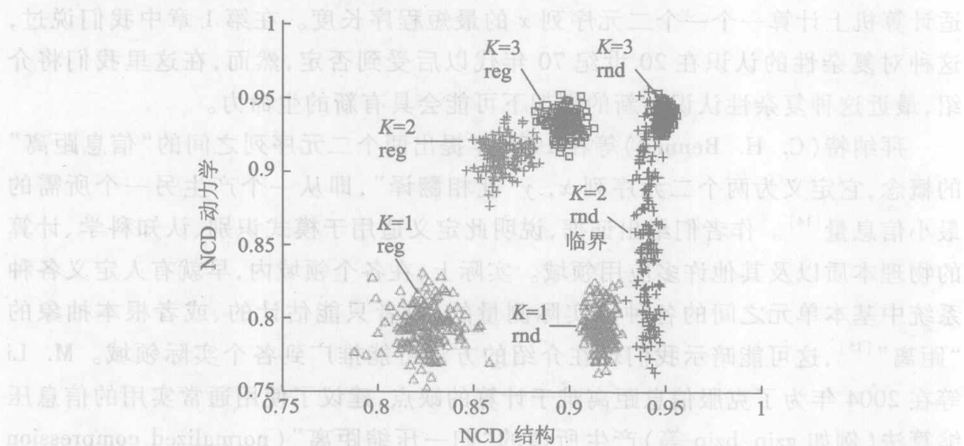


图11.2　应用NCD表述的布尔网络结构与动力学的关系（引自文献[2]）

这个方法表现了把布尔网络动力学描述推广向更多网络的可能性。

11.2 最小作用量原理与网络形态的自然选择

布尔网络显然是原胞自动机的延伸,而关于距离的定义使它可能描述更多的复杂系统,然而,想象一下我们周围形形色色十分复杂的系统,要想把它们的网络拓扑、作用信息、动力学规律都用符号序列,甚至数值序列来表示,似乎难以置信,至少十分困难。

从物理学的方法论角度可以认为原胞自动机和布尔网络(包括其拓广)都是简单系统还原论思路(即把系统分解为基本单元,然后综合它们的相互作用)的推广。如果这种方法论在运用到复杂系统时遇到困难,也许传统的简单系统物理学还给我们提供了另一种方法论。学物理的人对最小作用量原理应该都印象十分深刻。首先要提到光学的费马原理,它告诉我们:空间中两点之间光的实际路径总是光程(折射率与路程的乘积)取极值,即光程最短或最长的路径。对大多数情况,就可以说:大自然让光总是走最容易走的捷径。原则上,从费马原理出发可以推导出整个几何光学。其次就是分析力学中的最小作用量原理,它告诉我们:力学系统从时刻 1 到时刻 2 的实际运动总是作用量(拉格朗日函数(动能与势能之差)沿路径的积分)取极值的运动。对大多数情况,也可以说:大自然让力学系统在相空间中也总是走能量耗费最小、最容易走的捷径。原则上,从最小作用量原理出发也可以推导出整个经典力学。学习这两个原理之后,大家肯定认为它们是一个原理在不同科学领域的不同形式。光程就是几何光学中的作用量。那么,最小作用量原理是不是自然界的最普遍、最基本规律?是否可能写出各个具体科学领域中作用量的合适形式,从而把最小作用量原理推广到一切科学领域,甚至适用于复杂系统?这可能是一种理想,然而却有人一直在做这种努力。也许可以说,最小作用量原理应该和传统的还原论动力学框架在效果上等价,然而,它显然不表述那种“先分解、后综合”的思路,而是强调大自然会按照某种普适法则安排各种系统的自组织发展方向。如果可以把这种方法论用于复杂网络动力学,就说明自然界中形形色色网络形态的动力学机制也不一定表述为传统的还原论框架,也不一定表述为本书第 7 章中的一些阐述某些系统内部演化机制的网络演化模型,而可能表述为大自然按照某种普适法则逐渐进行选择的结果,这个普适法则可能就是对不同领域采取不同形式的最小作用量原理。我们在此仅介绍一个研究小组关于这个方向的系列论文(文献[17－24])。

这个小组的研究最早集中在河流网上。河流网及其流域的形成机理是一个热门话题。对此的实证统计和动力学模型研究可以上溯到 20 世纪 30 年代,而

且至今兴盛不衰。河流网及其流域的形成机理可以简化地认为是一个复杂的经典力学问题,因此可望用最小作用量原理描述。1992—1993 年间,爱图巴(I. Rodriguez - Iturbe)等人发表论文建议[17]:实际的河流网络形态可以用"哈密顿量最小化(最小作用量原理的一种表述)选择生成树"所得到的"最佳通道网"(optimal channel network,简称 OCN)极好地重现。即水流选择最容易走的路,就形成了河流网。系统的哈密顿量的表示式为

$$H_\gamma(s) = \sum_{i=1}^{L^2} A_i^\gamma, \tag{11.1}$$

其中 i 是 $L \times L$ 方晶格上的格点,$A_i = \sum_{j \in nn(i)} A_j + 1$,表示网络中 i 格点的"上游节点数",其中 $nn(i)$ 表示方晶格上"流入" i 格点的邻点,$\gamma \approx 0.5$ 是集中显示机理的标度常数。选择变量 $s \in S$(S 表示生成树集合),使此哈密顿量取最小值的生成树就是 OCN。文献[24]报道了有关的仔细讨论。按照此原理选择生成树的过程就是河流网自组织向 OCN 的过程。这个自组织过程是本书第 1 章介绍的自组织临界现象理论的体现。图 11.3 显示了 $\gamma = 0.5, L = 128$ 时如此得到的 OCN,数值模拟中令生成树的"根"位于左下角,每个指向流动方向的有向边连接所有邻接节点。显然模拟结果非常接近于实际的河流网络。

雷纳多(A. Rinaldo)等人在文献[17]中讨论了用上述方法得到的 OCN 的统计性质与实际河流网统计性质的对比。河流网的最著名实证统计规律可能是 Hack 定律[25]:$l \propto a^\lambda$,其中 a 表示河流的流域面积,l 表示河流的长度,$\lambda \approx 0.57$。这个特征标度因子值可以从另外两个重要的实证统计规律:河流流域面积(a)的累计分布 $P(A \geqslant a) \propto a^{-\beta}$ 与河流长度(l)的累计分布 $P(L \geqslant l) \propto l^{-\eta}$ 的标度因子通过换算得到[19]。文献[25]已经列举了全世界许多河流对 Hack 定律的实证统计证明。此外,道兹(P. S. Dodds)等报道了美国堪萨斯河与密西西比河数据对 Hack 定律以及其他不少统计特征的实证证明[26];胡进琨、张纯陵、许田、苏蓓蓓、何大韧等人也曾得到长江的有关实证统计[27]。雷纳多等人模拟得到:河流网按照哈密顿量最小化演化,会自组织形成 OCN,同时逐渐展现符合上面三个标度律的分布[17]。

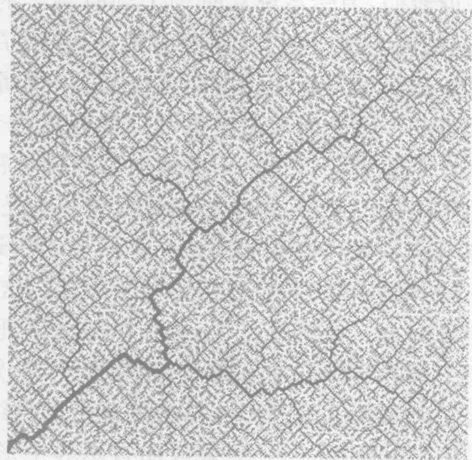


图 11.3　$\gamma = 0.5, L = 128$ 时按文中方法得到的 OCN(引自文献[18])

这个小组随后把这种思想推广到对更普遍的传输网络[20,21]和更多其他类

型网络[22-24]的自组织形成研究。文献[20]讨论了包括传输水、血、污水、食物、空气、电流等网络的最佳输运网及其最重要的统计规律。为了对比，首先回顾欧氏空间中一个 D 维的、特征尺寸为 L 的聚集物体，它的体积 V、质量 m 等传统性质与 L 的标度律都应满足大家熟知的形式 $V \propto L^D$ 和 $m \propto L^D$。然而，传输网络中的最重要问题(即每时刻的传播物总量(例如一个动物在任一确定时刻的血流总体积 C)在最佳传输网中与 L 的标度律)是否满足同样的形式很值得怀疑，这是由于这些传输网络通常是分形，而且自然网络会在远离平衡时自组织向它们的最佳形态。文献[20]建议：传输网的自组织是在保持传播功能的前提下，在每时刻传播物总量 C 最小化(例如保持机体正常的最小血流量传输网，应该也是最小作用量原理的一种表述)原则支配下不断自然选择进行的。由此出发，文献[20](及其附件)解析地证明了：在一些不失一般性的简化假设下，最佳传输网中的普适标度律形式为：$C \propto L^{D+1}$，这个结论对所有具有单一"源泉"的最佳有向传输网成立，与是否存在圈(即是否为生成树)无关。相应的，作者们证明了：进行传输的节点总数 B 与 C 的普适标度律为：$B \propto C^{D/(D+1)}$。在河流网中，对应前面介绍的 $A_i = \sum_{j \in nn(i)} A_j + 1$ 公式，在此处用 A 表示河流流域中流入单元 x 的所有单元面积，可以把 C 写为 $C \propto \sum_{x \in \gamma} A_x$，其中 γ 表示河流网中所有流入单元 x 的单元集合，则相应的，应该有：$A \propto C^{D/(D+1)}$。当 $D=2$(河流网可被认为是平面图)时，标度律成为：$A \propto C^{2/3}$。图 11.4 显示了根据三条实际河流(美国西弗吉尼亚州的 Dry Fork，美国爱达荷州的 Island Creek，以及意大利的 Tirso)的实证数据画出的 A-C 关系图，显示了与 $A \propto C^{2/3}$ 符合极好的普适标度关系。

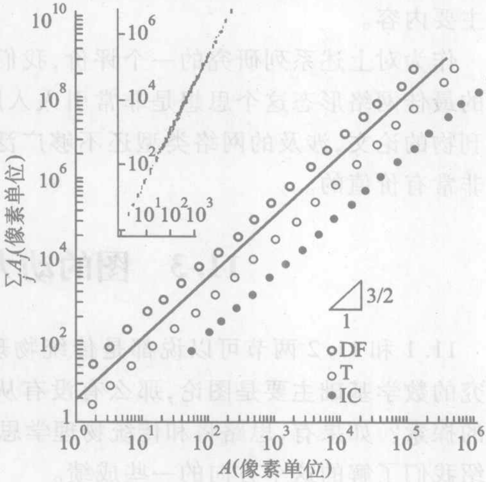


图 11.4 根据三条实际河流的实证数据画出的 A-C 关系图(引自文献[20])

其中代表各个河流数据的符号说明见图中右下角。插入图显示 Tirso 未处理的原始数据

文献[21]把这个问题的讨论集中在交通运输网络上。作者们提出：这时作用量应该定义为进行一次交通运输的总花费值。也就是说，按照最小作用量原理，OCN 应该是自然选择的最小交通代价网，或者说大家会逐渐走花费最小的道路。这个表述开始容纳有思想、会选择的"主动作用者"的作用，可能是把最小作用量原理推广向最典型复杂系统的开端。交通

网虽然自身没有生命,但是它受到人的关键控制与影响,所以不能看作简单系统,把最小作用量原理做根本性推广是非常必要的。文献[21]首先考虑一个单一目的地的连通网,其中一条边 b 上运输物质 i_b 的花费值为 C_b,则采取从实践中总结出的最简化考虑,有:$C_b = k_b |i_b|^\gamma$,其中 k_b 表示与边相关的正比例值(例如,对于电流输运情况,k_b 就是电阻,i_b 就是电流,C_b 就是消耗的电功率,$\gamma=2$)。作者们解析地证明了[21]:当 $\gamma>1$ 时,OCN 使用所有可能的交通道路,因此几乎肯定出现回路(圈);而当 $\gamma<1$ 时,OCN 最好把一个节点的物质只运送到它的一个邻点,因此网络具有树图形态。这个结论可能在许多实际问题中具有重要性。

文献[22,23]把这个问题的讨论推广到更多类型的网络上。文献[22]讨论这样一类网络,其中的主要问题是寻找任意两个节点之间的最短并且拥塞最小的道路,这个问题的物理意义可以随网络变化,涵盖许多实际系统。这时作用量定义为:$H_\gamma = \sum_{i<j} d_{ij}(\gamma)$,其中 i, j 表示网络中一对节点,γ 表示上面所说的花费值函数 C_b 的幂律表示式中的标度常数,$d_{ij}(\gamma) = \min_{P} \sum_{p\in P;i\to j} k_p^\gamma$,其中 P 表示连接 i, j 的路径集合,p 是其上的一个节点,k_p 表示 p 节点的度。$d_{ij}(\gamma)$ 实际上表示 i, j 的一种含权距离,当 $\gamma\to 0$ 时,它就退化为一般的 i, j 的距离表示式。这种新的含权距离定义包含了两个互相竞争的因素:尽量避免长路经和跳过交通繁忙的节点。令 $H_\gamma = \sum_{i<j} d_{ij}(\gamma)$ 最小化的就是 OCN。文献[23]回顾了所有以上介绍的主要内容。

作为对上述系列研究的一个评价,我们认为由最小作用量原理判断自然选择的最佳网络形态这个思想是非常引人入胜的,目前虽然已经发表了不少高级别刊物的论文,涉及的网络类型还不够广泛。沿着这个方向的进一步工作仍旧是非常有价值的。

11.3 图的动力学谱分析

11.1 和 11.2 两节可以说都是传统物理学思想的延伸。大家都知道,网络研究的数学基础主要是图论,那么有没有从图论角度出发的复杂网络动力学框架的探索?如果有,思路将和传统物理学思想有很大不同,值得注意。本节简单介绍我们了解的这个方向的一些成绩。

11.3.1 拉普拉斯矩阵及其谱分析

在本书 5.5 和 6.7 节中介绍了网络邻接矩阵的本征值谱密度。在第 7 章中也介绍了最著名的网络演化模型(ER 随机网模型、WS 小世界模型和 BA 无标度

模型)所产生的网络拓扑结构所对应邻接矩阵本征谱的不同特征,也就是邻接矩阵本征谱可以描述网络的拓扑结构[28]。然而,在近些年的网络谱分析研究中,常常涉及拉普拉斯矩阵的本征值谱密度。为此我们首先介绍网络的拉普拉斯矩阵。

对于一个无权简单图,拉普拉斯矩阵定义为

$$L(u,v) = \begin{cases} d_v, & \text{若 } u = v, \\ -1, & \text{若 } u \text{ 与 } v \text{ 相邻}, \\ 0, & \text{其他情况}, \end{cases} \tag{11.2}$$

其中 u,v 表示网络中两个节点,d_v 表示 v 的度。

对一个含权简单图,拉普拉斯矩阵定义为

$$L(u,v) = \begin{cases} s(v) = \sum\limits_{x \in V, (x,v) \in E} \omega(x,v), & \text{若 } u = v, \\ -\omega(u,v), & \text{若 } u \text{ 与 } v \text{ 相邻}, \\ 0, & \text{其他情况}, \end{cases} \tag{11.3}$$

其中 s_v 表示 v 的点强度,$\omega(u,v)$ 表示边 (u,v) 的边权。

对于拉普拉斯矩阵的本征值有以下经过严格证明的结论[29]:

1. 拉普拉斯矩阵对称,所有的本征值为实数。

2. 所有拉普拉斯矩阵的本征值被限制在 $[0,g]$ 范围内,其中 g 是图 G 中最大度值的两倍,因此拉普拉斯矩阵的本征值谱可以写为:$0 = \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant g$。相应的本征矢为:$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$。

3. 经常使用另一种拉普拉斯矩阵的定义:$\widehat{\boldsymbol{L}} = g \cdot \boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}$,其中 $\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵。它具有与 $\boldsymbol{L}$ 相同的本征矢,但是相应的本征值排序相反:$g = g - \lambda_1 \geqslant g - \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant g - \lambda_n$。这种表述对稀疏矩阵特别方便。

11.3.2 图演化序列的拉普拉斯矩阵谱表示

如果只考虑用二维直线表示边的含权简单无向平面图,这个图可以在 Oxy 坐标平面上用一组位于 $\boldsymbol{p}(v) = (x(v), y(v))$ 的向量 $(\boldsymbol{p}(v))_{v \in V}$ 来表示。这一组向量 $\boldsymbol{p}$ 也可以向一个坐标方向(例如 x)投影,得到一个图的标量描述。这样,任意定义的一个图的矩阵都可以用它的两个本征矢 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 来表征。上述的拉普拉斯矩阵本征值谱常常用它的两个最小非零本征值 λ_2, λ_3 对应的本征矢 $\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ 来表征。

本节仅讨论这样的演化图(或称为"动力学图"),当时间离散地演化时,图 G 随时间演化,给出一个序列 $G^{(0)}, G^{(1)}, \cdots, G^{(t_{\max})}$,而且规定任一个 $G^{(t+1)}$ 是由 $G^{(t)}$ 经过加、减或者变化少数节点或边得到。相应的向量演化序列为 $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_{t_{\max}}$。

用 $\widehat{L} = g \cdot I - L(G^{(1)})$ 表示图演化第一步 $G^{(1)}$ 的拉普拉斯矩阵，且重新规定它的本征值谱为 $g = \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$，以及相应的本征矢 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$。如果为了简便，只考虑向量 $\boldsymbol{p}$ 向 x 坐标方向的投影（同时考虑两个坐标方向投影的讨论定性相同），且把 x 方向投影表示为 $x = \sum_{j=2}^{n} \alpha_j u_j,\quad \alpha_2 \neq 0$，可以证明[29]：

$$\frac{\widehat{L}^k x}{\| \widehat{L}^k x \|} \to u_2, \tag{11.4}$$

并且

$$\left\| u_2 - \frac{\widehat{L}^k x}{\| \widehat{L}^k x \|} \right\| = \left\| u_2 - \frac{\sum_{j=2}^{n} \lambda_j^h \alpha_j u_j}{\| \widehat{L}^k x \|} \right\| \leqslant 1 - \frac{\lambda_2^h \alpha_2}{\| \widehat{L}^k x \|} + \frac{\sum_{j=3}^{n} \lambda_j^h \alpha_j}{\| \widehat{L}^k x \|}$$
$$= O((\lambda_3/\lambda_2)^k), \tag{11.5}$$

其中 $\| A \|$ 表示矩阵 A 所有矩阵元之和。

在我们的知识范围内，这项研究代表了对第 2 章介绍的传统静态图论改造，使之进化为演化图论或动力学图论的最主要试探。图的矩阵表述及其本征值谱为此提供了重要工具。对此方法更多的介绍以及在小世界网演化时的应用可以参看文献[29]。

作为一个小结，本章非常简单地介绍了复杂网络动力学框架的三个研究方向，它们分别代表了运用、借鉴传统物理学中的还原论方法、自组织观点或者数学图论中谱分析方法构建复杂网络动力学框架的新延伸、新探索。这些探索还只处在开创阶段，要走的路还很长，也许这些探索最终只能给大家以启示，使大家意识到复杂网络动力学框架必须采取的全新思路。然而，无论如何，我们认为这些探索代表了复杂网络研究的一个具有根本重要性的方向，值得所有人注意。

第十一章参考文献

[1] A. Wuensche, Discrete Dynamical Networks and their Attractor Basins, 1998, Santa Fe Institute working paper, 98-11-101. http://citeseer.ist.psu.edu/wuensche98-discrete.html.

[2] M. Nykter, N. D. Price, A. Larjo, T. Aho, S. A. Kauffman, O. Yli-Harja and I. Shmulevich, Phys. Rev. Lett., 100 (2008) 058702.

[3] Kauffman S A. The Origins of Order: Self-Organization and Selection in Evolution. New York: Oxford Univ. Press, 1993.

[4] M. Andrecut and S. A. Kauffman, Phys. Lett. A, 372 (2008) 4757.

[5] B. Derrida and D. Stauffer, Europhys. Lett., 2 (10) (1986) 739.

[6] B. Derrida and Y. Pomeau, Europhys. Lett., 1 (2) (1986) 45.

[7] R. V. Sole and B. Luque, Phys. Lett. A, 196 (1995) 331.

[8] B. Luque and R. V. Sole, Phys. Rev. E, 55 (1) (1997) 257.
[9] B. Luque and R. V. Sole, Physica A, 284 (2000) 33.
[10] A. A. Moreiral and L. A. N. Amaral, Phys. Rev. Lett., 94 (2005) 218702.
[11] S. Kauffman, Physica A, 340 (2004) 733.
[12] 汪秉宏.经济复杂系统的研究方向.在2006全国复杂网络学术会议上的报告。
[13] A. Wuensche, Basins of attraction in network dynamics, 2002, working paper 02 – 02 – 004 Santa Fe Institute.
[14] C. H. Bennett, P. Gacs, M. Li, P. M. B. Vitányi and W. H. Zurek, IEEE Trans. Infor. Theo., 44 (4) (1998) 1407.
[15] M-M. Deza and E. Deza, Dictionary of Distances, 2006, Elsevier Science.
[16] M. Li, X. Chen, X. Li, B. Ma, and P. M. B. Vitányi, IEEE Trans. Infor. Theo., 50 (12) (2004) 3250.
[17] I. Rodriguez-Iturbe, A. Rinaldo, R. Rigon, R. L. Bras and E. Ijjasz-Vasquez, Water Resour. Res., 28 (1992) 1095; Geophys. Res. Lett., 19 (1992) 889; A. Rinaldo, I. Rodriguez-Iturbe, R. Rigon, R. L. Bras, E. Ijjasz- Vasquez and A. Marani, Water Resour. Res., 28 (1992) 2183; A. Rinaldo, I. Rodriguez-Iturbe, R. Rigon, E. Ijjasz-Vasquez and R. L. Bras, Phys. Rev. Lett., 70(3) (1993) 822.
[18] A. Rinaldo, A. Maritan, F. Colaiori, A. Flammini, R. Rigon, I. Rodriguez-Iturbe and J. R. Banavar, Phys. Rev. Lett., 76(18) (1996) 3364; A. Giacometti, A. Maritan and J. R. Banavar, Phys. Rev. Lett., 75(3) (1995) 577.
[19] J. R. Banavar, F. Colaiori, A. Flammini, A. Giacometti, A. Maritan and A. Rinaldo, Phys. Rev. Lett., 78(23) (1997) 4522.
[20] J. R. Banavar, A. Maritan and A. Rinaldo, Nature, 399 (1999) 130.
[21] J. R. Banavar, F. Colaiori, A. Flammini, A. Maritan and A. Rinaldo, Phys. Rev. Lett., 84(20) (2000) 4745.
[22] V. Colizza, J. R. Banavar, A. Maritan and A. Rinaldo, Phys. Rev. Lett., 92 (2004) 198701.
[23] A. Rinaldo, J. R. Banavar, V. Colizza and A. Maritan, Physica A, 340 (2004) 749.
[24] J. R. Banavar, F. Colaiori, A. Flammini, A. Maritan and A. Rinaldo, J. Statistical Physics, 104(1/2) (2001) 1.
[25] J. T. Hack, U.S. Geological Survey, Professional Paper No. 294 – B (1957) 45.
[26] P. S. Dodds and D. H. Rothman, Phys. Rev. E, 63 (2000) 016115; 63 (2000) 016116; 63 (2000) 016117.
[27] 胡进琨,张纯陵,许田,苏蓓蓓,何大韧. 长江流域的一些地理、经济性质及港口贸易的研究.待发表。
[28] M. A. M. de Aguiar and Y. Bar-Yam, Phys. Rev. E, 71 (2005) 016106.
[29] U. Brandes, D. Fleisher and T. Puppe, J. Graph Algorithms and Applications, 11(2) (2007) 325.